平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-A　解答例

$\boxed{\text{II-A}}$ 解答例

出題意図：　軽いひもにつながれた2つの小球の落下運動を題材に、慣性質量と加速度、運動の軌道、エネルギー、張力、運動量と力積などの、物理の基本的理解を問う。また、ひもに質量がある場合を考え、エネルギー保存、微分などの数学基礎、力に関する発展的な理解度を問う。

問1

(1) 小球A: $a_{\rm A} = g - T/m$，小球B: $a_{\rm B} = T/m$。

(2) $a_{\rm A} = a_{\rm B}$ なので，$a_{\rm A} = g/2$。運動させる重力は mg，慣性質量は $2m$ なので。

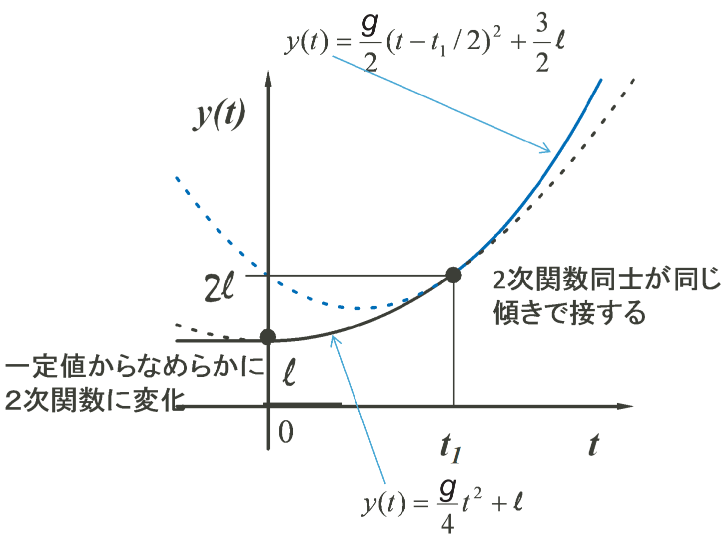
(3) $v(t) = \frac{g}{2}t$，$y(t) = \frac{g}{4}t^2 + \ell$。

(4) $E(t) = 2 \times \frac{m}{2}v^2(t) - mgy(t) = \cdots = -mg\ell = E(0)$

(5) $y(t_1) = \frac{g}{4}t_1^2 + \ell = 2\ell$ より，$t_1 = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$。$v_1 = \dot{y}(t_1) = \frac{g}{2}t_1 = \sqrt{g\ell}$。

(6) 小球A: $m\ddot{y}(t) = mg - T$，小球B: $m\ddot{y}(t) = mg + T$，ゆえに一緒に落ちている時は，同じ加速度 g で，$T = 0$。この時，$y(t) = \frac{g}{2}(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + 2\ell$ $\left(= \cdots = \frac{g}{2}(t - \sqrt{\ell/g})^2 + \frac{3}{2}\ell = \frac{g}{2}(t - t_1/2)^2 + \frac{3}{2}\ell\right)$

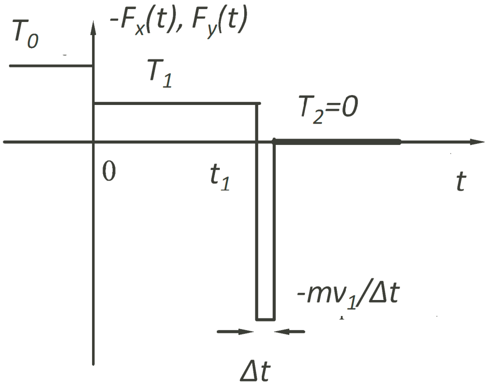
(7)



(8) $t < 0$: $T_0 = mg$。
$0 < t < t_1$: $T_1 = mg - m\ddot{y}(t) = mg/2$。小球Aは加速度 $g/2$ で落下しているので，重力 $T_0 = mg$ より小さくなる。

$t_1 < t$: 問 (4) より $T_2 = 0$。小球 A, B は同じ加速度になるので張力はなくなる。

(9)



力×時間＝運動量変化から、小球 B による撃力を求める。

問 2

(1) 質量 $\cdot\, g \,\cdot$ 平均高さ下降 $= -(\rho Y)g \cdot \frac{Y}{2}$

(2) $E(t) = \frac{(2m+2\rho\ell)}{2}V^2 - (\rho Y)g \cdot \frac{Y}{2} - mgY = 0 - \rho\ell g \cdot \frac{\ell}{2} - mg\ell = E(0)$ から，$V^2 = \frac{1}{m+\rho\ell}(\frac{\rho g}{2}(Y^2-\ell^2) + mg(Y-\ell))$。
ちなみにひもの重さがなければ，$\rho = 0$ として，$V'^2 = g(Y-\ell)$。

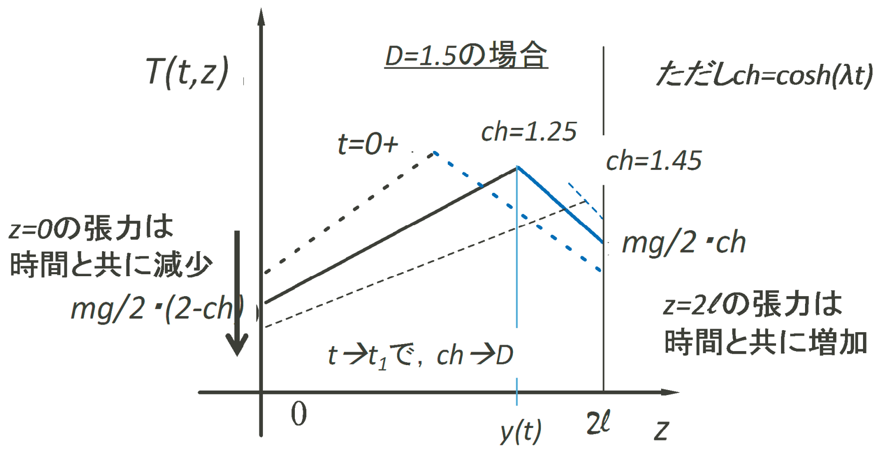
(3) $V^2/V'^2 = \frac{m+\rho\frac{Y+\ell}{2}}{m+\rho\ell}$。ここで，$\frac{Y+\ell}{2} > \ell$ なので，$V > V'$。つまり，質量を無視できない場合の方が速さが大きい。ところで，同じ Y に到達した時の速さが速ければ，到達するまでの時間は短い。だから，質量を無視できない場合の方が速く落下する。

(4) $(2m + 2\rho\ell)$ は全系の慣性質量。$\frac{d^2}{dt^2}y(t)$ は加速度，小球 A，B およびひもで同じため。mg は小球 A への重力，$\rho y(t)g$ は垂れているひも部分に働く重力。

(5) $y(t)$，$\ddot{y}(t)$ を代入して，$2(m+\rho l)(C_1\lambda^2 e^{\lambda t} + C_2\lambda^2 e^{-\lambda t}) = (m + \rho C_1 e^{\lambda t} + \rho C_2 e^{-\lambda t} + \rho C_3)g$ より，$C_3 = -m/\rho$，$\lambda^2 = \rho g/(2(m+\rho l))$。

(6) 初期条件 $y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = l$，$\dot{y}(0) = \lambda(C_1 - C_2) = 0$ より，$C_1 = C_2 = (l + m/\rho)/2$。
結局，$y(t) = A\cosh(\lambda t) - m/\rho$，ただし $A \equiv l + m/\rho$，$\cosh(\lambda t) = (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})/2$。

(7) $z < y(t)$: $(m+\rho z)\ddot{y} = (m+\rho z)g - T(t,z)$ に $y(t)$ 代入して，
$T(t,z) = \cdots = \frac{(m+\rho z)g}{2}(2 - \cosh(\lambda t))$。
$z > y(t)$: $(m+\rho z)\ddot{y} = (m+\rho y)g - T(t,z)$ に $y(t)$ 代入して，
$T(t,z) = \cdots = \frac{(m+\rho(2l-z))g}{2}\cosh(\lambda t)$。
これから両式は z の一次関数。もちろん $z = y(t)$ で両式は一致する。
小球が右上端に到達する時刻 t_1 は，$y(t_1) = 2\ell$ より $\cosh(\lambda t_1) = D \equiv \frac{m+2\rho\ell}{m+\rho\ell} < 2$ と求まる。故に，時刻 t における上記式の $\cosh(\lambda t)$ は $\cosh(\lambda t) < D < 2$ を満たす。



張力が最大なのは，z=y(t)の位置、
つまり机の右上端の動いてきている紐の部分.
この最大値は時刻と共に徐々に減少