

平成 26 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II-C 解答例

II-C 解答例

問 1

(a) $\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} = 2^4$ より $2^4 = 16$ である.

(b) 6 種類

配置は以下の通りである. ただし, \circ は白, \diamond は黒である.

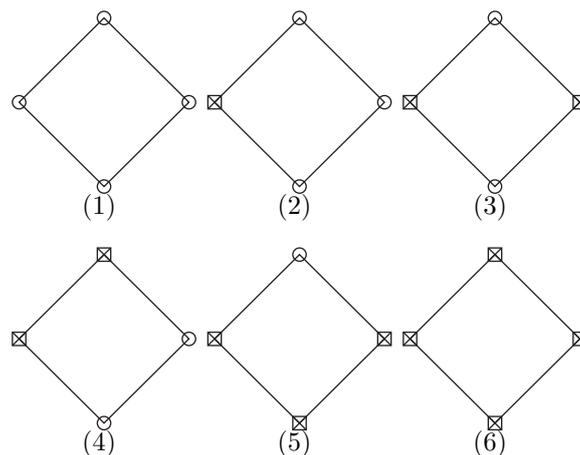


図 1:

(c) 2 種類

配置は以下のとおりである. ただし, \circ は黄, \diamond は黒, \triangle は白である.

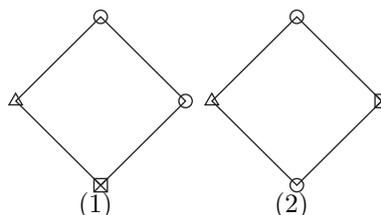


図 2:

(d) 数珠は裏返しても同じ配置なので, 客の数と玉の数が同じであれば, 円卓に着席する配置の総数は, 数珠の玉の配置の総数の 2 倍になる.

問 2

(a) 二項定理と二項係数の性質

$(x+z)^n$ を展開したときの $x^p z^{n-p}$ の係数は黒を p 個 黄を $(n-p)$ 個 白を $n-p$ 個 並べる場合の総数である。

を利用する。ここでさらに、 p 個の黒玉の内 l 個を白に変えると $x^l y^{p-l} z^{n-p}$ の係数が黒 l 個, 白 $k-l$ 個, 黄 $n-k$ 個に塗り分ける場合の数になる。ここで, $i=l$ $j=p-l$ $k=n-p$ と置き換えると黒を i 個, 白を j 個, 黄を k 個並べる配列の総数となる。

(b) (a) に基づき計算すると,

$$\frac{n!}{i!j!k!}$$

を得る。

問 3

以下の 3 種類である。

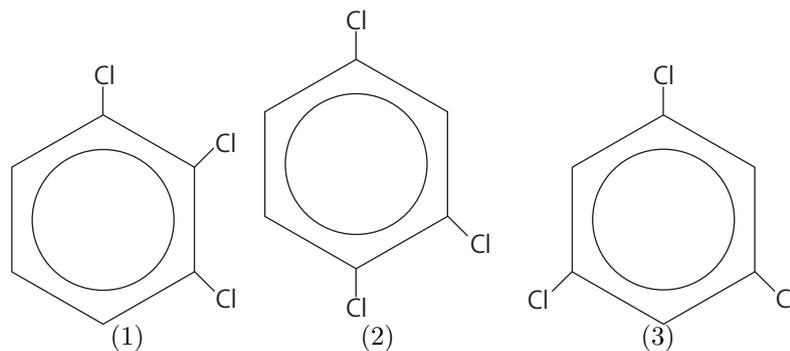


図 3: トリクロロベンゼンの 3 つの構造

問 4,5 回転と鏡像による正六角形の頂点の番号の付け替えは図 4 に示す 12 種類である。個の図より, 図 5 に示す変換, 巡回表現, 巡回数を得る。一般に, 回転と鏡像による正 n 角形の頂点番号の付け替えは $2n$ 種類存在する。

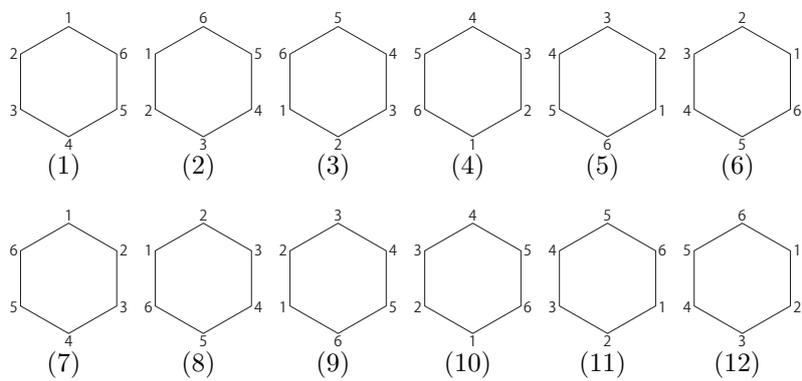


図 4: 正六角形の回転と鏡像

| 問4 | 問5 | 巡回数 |
|--|----------------------|---------------|
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ | $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ | f_1^6 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ | $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ | f_6 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ | $(1, 6, 5, 4, 3, 2)$ | f_6 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ | $(1, 3, 5)(2, 4, 6)$ | f_3^2 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ | $(1, 5, 3)(2, 6, 4)$ | f_3^2 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ | $(1, 4)(2, 5)(3, 6)$ | f_2^3 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ | $(1)(2, 6)(3, 5)(4)$ | $f_1^2 f_2^2$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ | $(2)(1, 3)(4, 6)(5)$ | $f_1^2 f_2^2$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ | $(3)(2, 4)(1, 5)(6)$ | $f_1^2 f_2^2$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ | $(1, 4)(2, 3)(5, 6)$ | f_2^3 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ | $(2, 5)(3, 4)(1, 6)$ | f_2^3 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ | $(3, 6)(4, 5)(1, 2)$ | f_2^3 |

図 5: 問4, 問5 の解

問 6

- (a) k 個の要素からなる l 個の集合の要素の総数が 6 であるから, $k \times l = 6$
- (b) k 個の要素からなる l 個の集合の要素と m 個の要素からなる n 個の集合の要素の総数が 6 であるから $k \times l + m \times n = 6$

問 7

問題の図 5 より, 正方形の頂点番号付替えに関する巡回数は $f_1^4, f_1^2 f_2, f_2^2, f_4$ である. さらに, f_1^4 が 1 種類, $f_1^2 f_2$ が 2 種類, f_2^2 が 3 種類, f_4 が 2 種類, 合計 8 種類ある. したがって, 巡回指標は

$$\sigma_4 = \frac{1}{8}(f_1^4 + 2f_1^2 f_2 + 3f_2^2 + 2f_4)$$

である.

問 8

問 4.5 の結果より, 変換は 12 種類あるので,

$$\sigma_6 = \frac{1}{12}(f_1^6 + 2f_6 + 2f_3^2 + 3f_1^2 f_2^2 + 4f_2^3)$$

である.

問 9

- (a) σ_4 の f_k に $x^k + y^k$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\sigma_4(x, y) &= \frac{1}{8}\{(x+y)^4 + 2(x+y)^2(x^2+y^2) + 3(x^2+y^2)^2 + 2(x^4+y^4)\} \\ &= x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4 + R(x, y)\end{aligned}$$

となる. ここで, $R(x, y)$ は $x^4, x^3y, 2x^2y^2, xy^3, y^4$ を含まない $x^i y^j$ ($i+j=4$) の整式である. 従って, $B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = 1, B_5 = 1$ である.

- (b) $i+j=4$ を満たす自然数 i, j に関して $x^i y^j$ の係数は白玉と黒玉を合計 4 個使った数珠の玉の配置の総数である. したがって, $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$ が問 1(b) の解となる.

(c) σ_4 の f_k に $x^k + y^k + z^k$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\sigma_4(x, y, z) &= \frac{1}{4}\{(x+y+z)^4 + 2(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2) \\ &\quad + 3(x^2+y^2+z^2)^2 + 2(x^4+y^4+z^4)\} \\ &= 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 + Q(x, y, z)\end{aligned}$$

となる. ここで, $Q(x, y, z)$ は x^2yz, xy^2z, xyz^2 を含まない $x^i y^j z^k$ ($i+j+k=4$) の整式である.

(d) x^2yz の係数は x 色 2 個, y 色 1 個, z 色 1 個合計 4 個の玉からなる数珠の玉の配置の総数である. xy^2z, xyz^2 の係数の性質も同様である.

問 10

(a) 6 種類

解 1 問題の図 2, 問 3 の解をもとに作図し, 数え上げることができる.

X が 2 個置換したベンゼン環は 図に示す 3 種類である. Y をさらに 1 個置換すると 図 7 の 6 種類が導かれる.

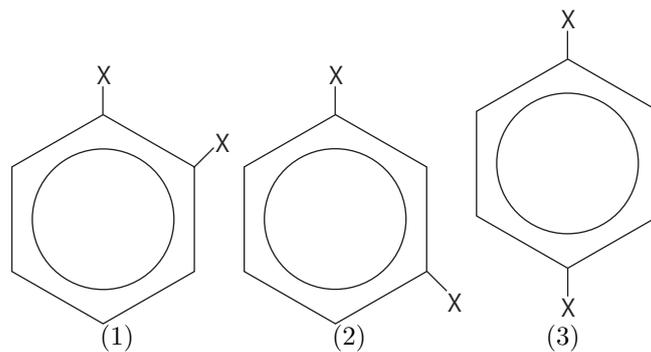


図 6: $C_6H_4X_2$ の配置

解 2 問 8 の結果より, 問 9 を参考として x^2yz^3 の係数を求める.

(b) 6 個の玉からなる数珠の玉のうち 3 個を透明, X 玉と Y 玉の合計を 3 個と考えれば, 数珠の玉の配置は $C_6H_3X_2Y$ の配置と 1 対 1 に対応する.

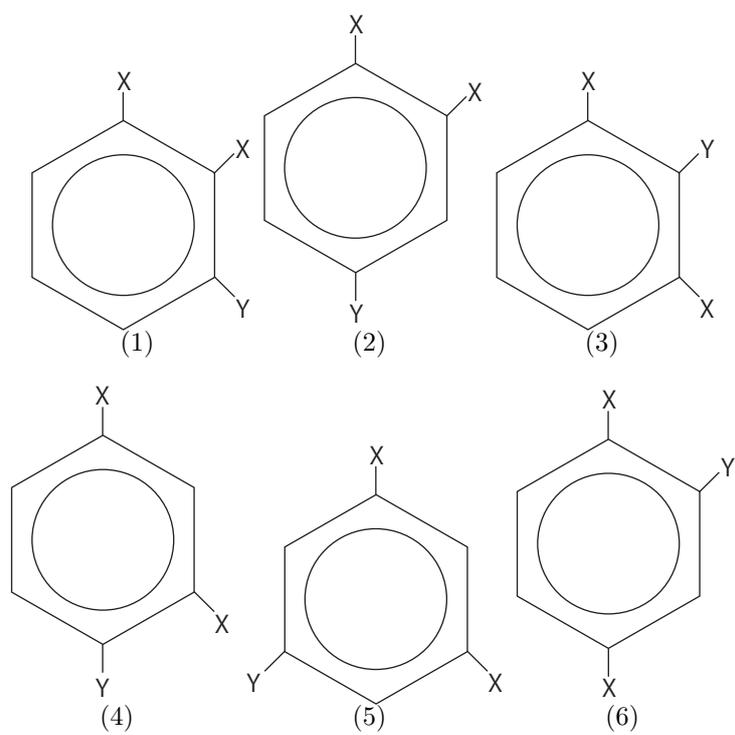


図 7: 図の配置に Y を 1 個置換して得られる $C_6H_3X_2Y$ の配置

参考:シクロプロパンの置換, 巡回表現, 巡回数

3つのラベル (a, b, c) を並べ替える操作は, 並べ替えない操作 (恒等変換) も含めて

$$\begin{array}{c} abc \ bca \ cab \\ acb \ cba \ bac \end{array}$$

の6種類である. 正3角形の3つの頂点に反時計回りに順に記号 a, b, c を割り振る. 頂点に記号の付いた正三角形を回転と鏡像変換とによって変換しときに現れる正三角形は図8に示す6種類である.

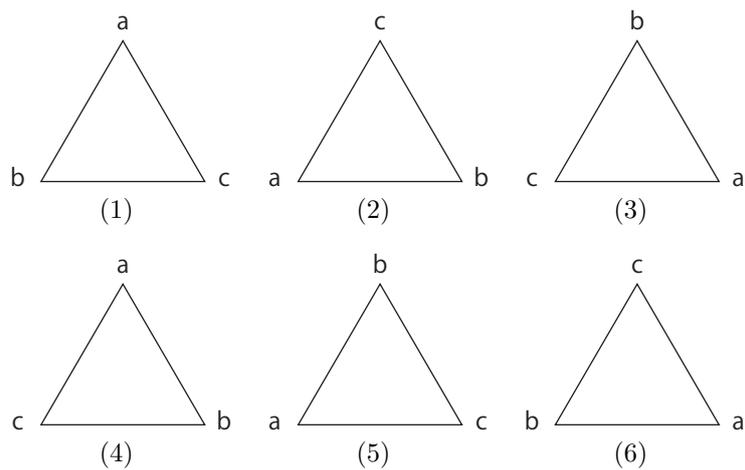


図 8: 正三角形の頂点のラベル付け

次に, 対応

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f \end{bmatrix}$$

で並替えた結果に, さらに対応

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ u & v & w & x & y & z \end{bmatrix}$$

を適用した合成変換が

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ u & v & w & x & y & z \end{bmatrix}$$

となることを利用すると, 対応

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

を得る. この対応は, 正3角柱の上面と下面とを鏡像によってを入れ替える変換である. この変換と, 正3角形の頂点のラベルの付け替えを合成すると, 正3角柱の頂点のラベルの付け替えについて, 以下の図9の表を得る.

| 変換 | 巡回表現 | 巡回数 |
|--|----------------------|---------------|
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ | $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ | f_1^6 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ | $(1, 2, 3)(4, 5, 6)$ | f_3^2 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ | $(1, 2, 3)(4, 5, 6)$ | f_3^2 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ | $(1)(2, 3)(4)(5, 6)$ | $f_1^2 f_2^2$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ | $(3)(1, 2)(6)(4, 5)$ | $f_1^2 f_2^2$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ | $(2)(1, 3)(5)(4, 6)$ | $f_1^2 f_2^2$ |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ | $(1, 4)(2, 5)(3, 6)$ | f_2^3 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ | $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ | f_6 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ | $(5, 6, 4, 2, 3, 1)$ | f_6 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ | $(1, 4)(2, 6)(5, 3)$ | f_2^3 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ | $(1, 5)(2, 4)(6, 3)$ | f_2^3 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ | $(1, 6)(2, 5)(3, 4)$ | f_2^3 |

図 9: 正 3 角柱の頂点ラベル付替え表

図9に基づいて正3角柱の巡回指数を求めると

$$\sigma_{3-3} = \frac{1}{12}(f_1^6 + 2f_6 + 2f_3 + 3f_1^2 f_2^2 + 4f_2^3)$$

である. 巡回指標が等しいことから, 正六角形の2つの頂点と正3角柱の2つの頂点を別々の色で塗り分ける場合の数は等しいことがわかる.

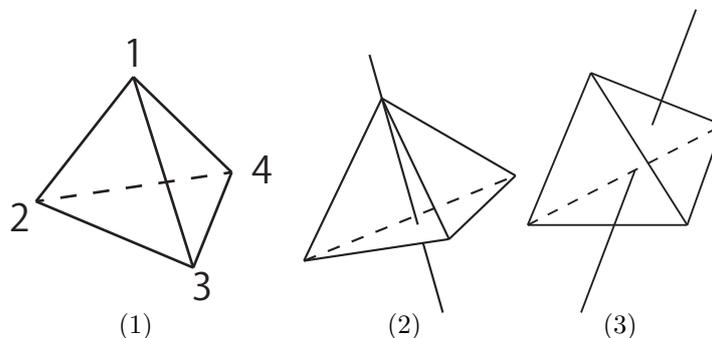


図 10: 正4面体の回転軸

頂点の数が4つである3次元図形として正4面体を考える. 正四面体に回転を施して元の正四面体に重ね合わせる回転の軸を考える. 図10(2)(3)に示すように, 1つの頂点と正四面体の中心を通る直線の周りに, 時計回りと反時計回りに120度回転する変換が散在する. この回転の軸は4本ある. したがって, 合計8種類の頂点のラベルの付け替え変換が存在する. また, ねじれの位置に存在する2つの辺の中点を通る軸の周りに180度回転する変換が存在する. この回転の軸は3本存在し, 対応する頂点番号付け替え変換は3種類存在する. さらに, 何も行わない恒等変換を加えると, 正四面体の頂点のラベルを付け替える回転変換は合計12種類存在することがわかる. 以上の12種類の変換の巡回表現は以下のようになる.

$$\begin{aligned} & (1)(2)(3)(4) \quad (1)(234) \quad (1)(243) \quad (12)(34) \\ & \quad \quad \quad (2)(134) \quad (2)(143) \quad (13)(24) \\ & \quad \quad \quad (3)(124) \quad (3)(142) \quad (14)(23) \\ & \quad \quad \quad (4)(123) \quad (4)(132) \end{aligned}$$

ここで, 巡回表現の定義を考えれば, 正4面体の巡回指標は

$$\sigma_T = \frac{1}{12}(f_1^4 + 8f_1 f_3 + 3f_2^2)$$

となる. 以上より, 頂点の数が同じでもその幾何構造が異なるので, σ_4 と σ_T とが異なる形式になることがわかる.