

平成 27 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題[II-A], [II-B], [II-C], [II-D]

(10:00—15:30)

注意事項

課題 II には, [II-A], [II-B], [II-C], [II-D] の 4 題があります。

志望するコースによって, 次を示す問題を解答してください。

- 物理学コース：
[II-A], [II-B]の 2 題を解答してください。
- フロンティアテクノロジーコース：
[II-A], [II-B], [II-C], [II-D] の中から 2 題を選択して解答してください。ただし, [II-A]あるいは[II-B]の少なくとも 1 題は選択すること。

II-A

ケプラーの法則を次のように記そう。

第1法則: それぞれの惑星は、恒星を焦点とする楕円軌道上を運動する。

第2法則: 恒星と惑星とを結ぶ線分(動径)が、単位時間に描く面積(面積速度)は、それぞれの惑星について一定である。

第3法則: 惑星の公転周期 T の2乗と、楕円軌道の半長軸 a の3乗の比は、同じ恒星を回るすべての惑星について同じ値である。

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

ただし、 G は万有引力定数、 M は恒星の質量である。

そうするとこの法則は、太陽系に限らず一般の恒星・惑星系で成立する。教科書でケプラーの法則および万有引力の法則について復習したうえで、太陽系外の恒星と惑星に関する以下の問いに答えなさい。またこの問題では、恒星の質量は惑星の質量より十分大きいので、恒星は静止していると見なしてよい。

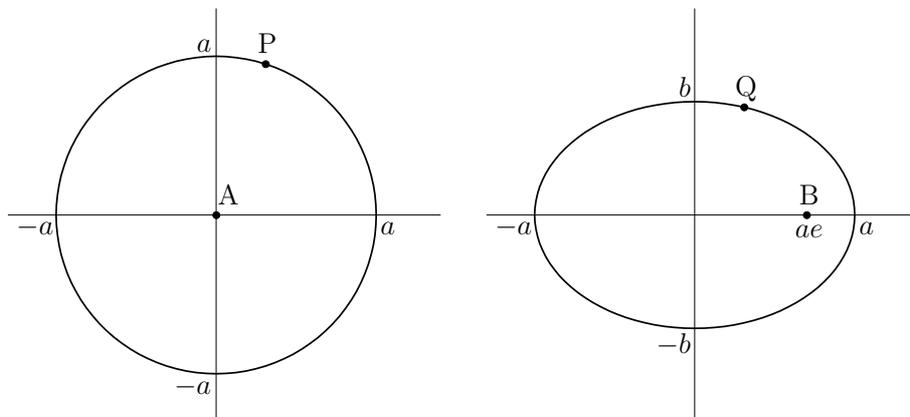


図 1: 円軌道 (左) と楕円軌道 (右)

問1 図1(左)のように、惑星Pは、半径 a の円軌道を描き、恒星Aの周囲を周期 T_P で公転している。恒星Aの質量 M_A は太陽の質量の何倍か、地球の公転周期 T_0 と半長軸 a_0 、および T_P 、 a を用いて表しなさい。

問2 図1(右)のように、惑星Qは、半長軸が a で半短軸が $b = a\sqrt{1-e^2}$ の楕円軌道を描き、恒星Bの周囲を周期 T_Q で公転している。ここで e は離心率である。恒星Bの質量 M_B を、 M_A 、 T_P 、 T_Q を用いて表しなさい。

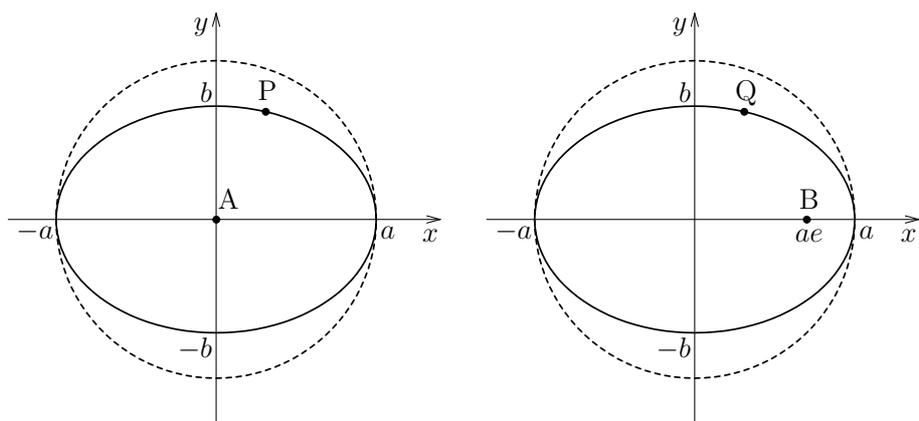


図 2: 円軌道 (左) と楕円軌道 (右)

さて、図 2 の実線は、地球 (観測点) から見た惑星 P と Q の軌道である。惑星 Q の軌道面は地球と恒星 B を結ぶ直線 (視線方向, z 軸) に対して垂直であるのに対して、惑星 P は軌道面が地球からの視線方向に対して傾いている。このため地球から観測すると、どちらも

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

という 2 次式で表される同じ大きさの楕円軌道上を反時計回りに運動しているように見える。しかし、恒星 A は楕円の中心 $(x, y) = (0, 0)$ に位置するのに対し、恒星 B は楕円の焦点 $(x, y) = (ae, 0)$ に位置する。

問 3 軌道が長軸と交わる点 $(x, y) = (a, 0)$ での惑星 P と Q の速さを、軌道の大きさを表す a, e , およびそれぞれの公転周期 T_P, T_Q を用いて表しなさい。ただし惑星 P の場合、地球と恒星 A を結ぶ方向の運動は測定できないとして、 xy 平面内の速さを求めなさい。

問 4 惑星 P が長軸と交わる位置 $(x, y) = (a, 0)$ を $t = t_P$ に通過したあと、

$$(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$$

のそれぞれを最初に通過する時刻を、 t_P と T_P で表しなさい。

問 5 惑星 Q が長軸と交わる位置 $(x, y) = (a, 0)$ を $t = t_Q$ に通過したあと、

$$(x, y) = (0, b), (-a, 0), (0, -b)$$

のそれぞれを最初に通過する時刻を、 t_Q と T_Q で表しなさい。

問 6 惑星 Q の速度の x 成分が最大となる位置を求めなさい。また、惑星 Q の速度の x 成分の最大値を a, e, T_Q を用いて表しなさい。

- 問 7** 惑星 Q を軌道の長軸方向から観測した場合と、短軸方向から観測した場合のそれぞれについて、速度がどのように変化するか、方眼紙にグラフを描いて説明しなさい。グラフを描く際には離心率を $e = 1/2$ としなさい。横軸は、 $t_Q = 0$ を原点とし、 T_Q を 10 cm として、2 周期分を描くこと。縦軸のスケールは自分で自由に決めてよいが、長軸方向から観測した場合と短軸方向から観測した場合をひとつのグラフにまとめ、比較しやすいようにすること。
- 問 8** 問 7 で求めた速度の時間変化は、惑星 P の速度変化とどのように違うか、その特徴について述べなさい。

II-B

単色の平行光の干渉について考えよう。以下では、単色光の波長を λ 、光速を c とする。

問1 まず、 x 軸上を正の向きに進行する単色光について考える。光は電場と磁場が振動する横波であり、平面波の進行と同様に考えることができる。ここで、 $x = x_0$ の位置で、光による電場の進行方向に垂直な成分が $E = E_0 \cos \omega t$ と書けるとする。

- (1) ω を λ と c のうち必要な記号を用いて表しなさい。
- (2) $x = x_0 + \ell$ の位置での電場の進行方向に垂直な成分を $E = E_0 \cos(\omega t - k\ell)$ と書くとき、 k を λ と c のうち必要な記号を用いて求めなさい。

問2 図1のように $x = 0$ であらわされる面 (yz 平面) 内に2本のスリットのある無限に広い板を置く。ただし、それぞれのスリットは y 軸上の2点 ($x = 0, y = -\delta$)、($x = 0, y = \delta$) にあり、 z 軸方向に無限に長く、その幅は δ や λ に比べて十分に小さいとする。この2本のスリットに、平行な単色光を入射する。単色光は位相がそろっており、スリットの位置において光は同位相であるとする。 xy 平面内で、原点 O を通り x 軸からの角度が θ で表される向きに距離 L だけ離れた点 P で光の強度を観察する。ただし、 L は δ と比べて十分に大きいとする。

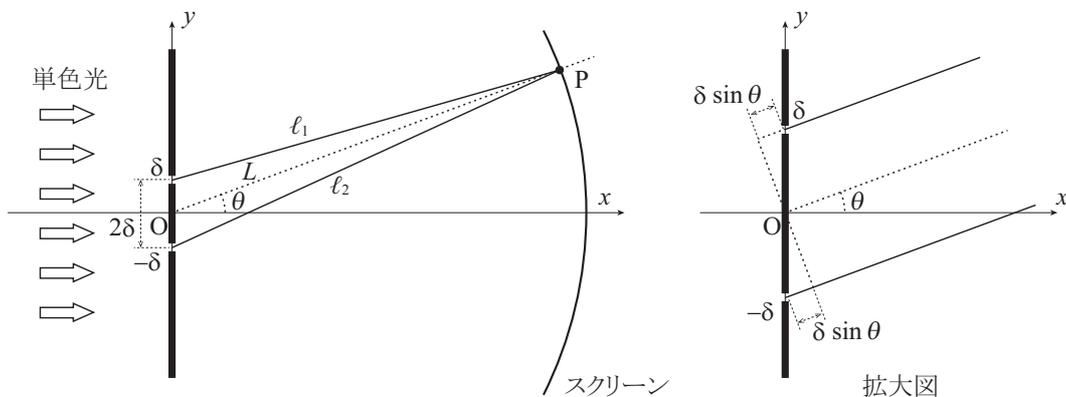


図1

- (1) $\theta = 0$ の向きで観測された光の強度が極大であった。 θ を増加させていくとき、はじめて強度が極小になる θ を θ_{\min} とする。 $\sin \theta_{\min}$ を求めなさい。ただし、2つのスリットから θ の方向へ進む光について、スリットから点 P までの光路長 ℓ がそれぞれ $\ell_1 = L - \delta \sin \theta$ 、 $\ell_2 = L + \delta \sin \theta$ であると考えればよい。

- (2) スリットで回折された光による点 P における電場を考える。ℓ が λ や δ と比べて十分に大きいとき、電場は一定の平面内を向いており、 $E = E_1 \cos(\omega t - k\ell)$ と書ける。 E_1 はスリットからの距離に依存するが、ℓ が δ に比べて十分に大きい時には、2 つのスリットから回折されてくる光について E_1 は等しいとしてよい。電磁場は重ね合わせができるため、ある点における電場はそれぞれのスリットから回折されてきた光による電場を足し合わせるにより得られる。このことを用いると、点 P における電場 $E(\theta)$ は $E(\theta) = f(\theta) \cos(\omega t - kL)$ と書ける。このとき $f(\theta)$ を求めなさい。
- (3) $F(\theta) = \frac{f(\theta)}{f(0)}$ とするとき、 $F(\theta)$ を求め、 $F(\theta)$ が E_1 によらないことを示しなさい。
- (4) 光強度 I は、電場を 2 乗したものを 1 周期にわたって積分した値に比例する。比例係数を A として、光強度 I を θ の関数として求めなさい。また、 $\lambda = 500 \text{ nm}$, $\delta = 5.0 \mu\text{m}$ として、光強度 I を θ の関数として見たときのグラフを $-\frac{1}{10} < \theta < \frac{1}{10}$ の範囲で配布した方眼紙に描きなさい。グラフには極小点の θ の値を明記すること。ただし、グラフを描くときには、 θ は十分に小さいとして、 $\sin \theta$ を θ で近似してよい。

問3 次に、図2のように $x = 0$ であらわされる面 (yz 平面) 内に1本のスリットのある無限に広い板を置く。ただし、スリットは y 軸上の線分 $-a < y < a$ 上で光を透過し、 z 軸方向に無限に長いとする。このスリットに、平行な単色光を入射することを考える。単色光は位相がそろっており、スリット内のすべての点において、光は同位相であるとする。 xy 平面内で、原点 O を通り x 軸からの角度が θ で表される向きに距離 L だけ離れた点 P で光の強度を観察する。ただし、 L は a と比べて十分に大きいとする。

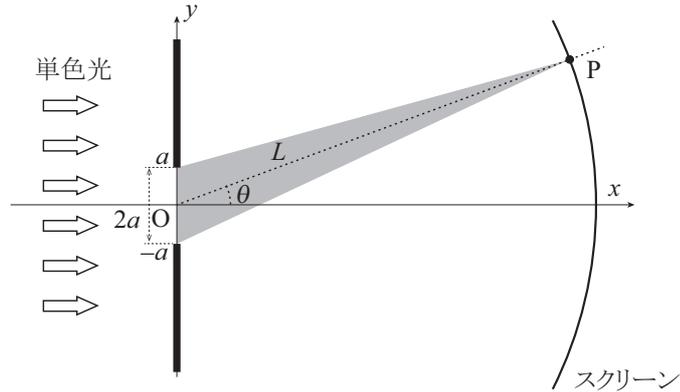


図2

- (1) スリットで回折された光による電場が問2(2)と同様に表されるとき、点 $(x = 0, y = b, z = 0)$ から広がっていく光について、点 P における電場 $E_1(b, \theta)$ を求めなさい。
- (2) (1) で求めた電場 $E_1(b, \theta)$ はスリット内の1点から回折されてきた光によるものである。スリット全体から回折してきた光による電場は b が $-a$ から a までの各点から広がってきた光による電場を積分することにより得られる。すなわち、点 P における電場 $E'(\theta)$ は

$$E'(\theta) = \int_{-a}^a E_1(b, \theta) db$$

と表すことができる。この積分を実行し、変形すると $E'(\theta) = g(\theta) \cos(\omega t - kL)$ となる。この $g(\theta)$ について、 $G(\theta) = \frac{g(\theta)}{g(0)}$ とおくと、 $G(\theta)$ を求めなさい。ただし、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は証明せずに用いてよい。

- (3) 光強度 I は、電場を2乗したものを1周期にわたって積分した値に比例する。比例係数を B として、光強度 I を θ の関数として求めなさい。また、 $\lambda = 500 \text{ nm}$, $a = 5.0 \mu\text{m}$ として、その関数のグラフを $-\frac{1}{10} < \theta < \frac{1}{10}$ の範囲で配布した方眼紙に描きなさい。グラフには極小点の θ の値を明記すること。ただし、グラフを描くときには、 θ は十分に小さいとして、 $\sin \theta$ を θ で近似してよい。
- (4) 単色光の代わりに白色光を入射した場合には、スクリーンにどのような像が映ると予想されるか? なぜそのように考えたかも含めて答えなさい。

(このページは空白です)

II-C

短辺の長さ $2a$, 長辺の長さ $2b$ ($a < b$) の長方形がある。3次元直交座標系において、この短辺は X 軸に平行、長辺は Y 軸に平行、 Z 軸が長方形と直交し、かつ、対角線の交点と原点が一致するよう配置されている。

問 1 解答用紙の 3次元直交座標系に長方形を書き入れなさい。

原点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線の周りの回転を考える。

問 2 X 軸上の点 $(c, 0, 0)$ (ただし $c > 0$) を、直線の周りに 360° 回転するとき、この点が描く軌跡を、解答用紙の 3次元直交座標系に書き入れなさい。

問 3 もとの長方形を、この直線の周りに 120° および 240° 回転させたときの位置にある長方形を、解答用紙の 3次元直交座標系に書き入れなさい。

もとの長方形を A , 上の回転移動後の位置にある長方形の一方を B 、他方を C とする。 A の各頂点から B および C の頂点のうち最も近い距離にあるすべての頂点を線分で結ぶ。同様に B から C および A に対して、 C から A および B に対して、それぞれ線分で結ぶ。

問 4 線分は全部で何本あるか答えなさい。ただし、両端点一致する線分は合わせて 1本と数えること。

上の問題で求めた線分と長方形 A, B, C の短辺をあわせたものは、ある多面体の辺になっている。

問 5 面は全部でいくつあるか答えなさい。

問 6 多面体が正多面体となるときの $\frac{b}{a}$ の値を求めなさい。答えだけでなく計算の過程も示すこと。

上の問題の正多面体の各辺を三等分する内分点について考える。

問 7 正多面体のある頂点に関して、この頂点を端点とする各線分の内分点のうち、この頂点に近い方の内分点すべてを通過する平面に対して、この頂点から下ろした垂線の長さを、 a を用いた式で表しなさい。答えだけでなく計算の過程も示すこと。

正多面体の全ての頂点に関して、問 7 で考察した平面で頂点側を切り落としたときにできる立体を考える。

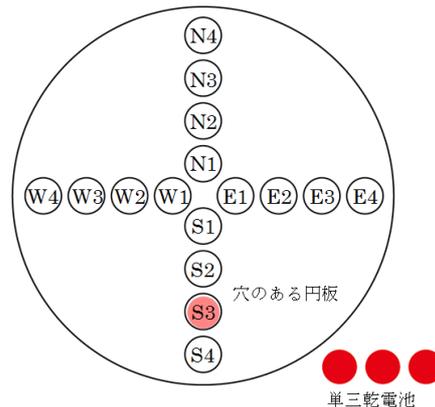
問 8 面は全部でいくつあるか答えなさい。

問 9 身近にあるものでこの多面体の構造を利用しているものを示しなさい。

II-D

準備された物品を使用して実験を行い、下記の問いに答えなさい。

[準備物品] 穴のある円筒、乾電池 4 本、ものさし、分度器、ストップウォッチ、消しゴム、マジック、シール・マーカー、かたい板、厚紙、水準器、はさみ、テープ (小)、テープ (大)、ボールペン赤青黒、方眼紙、座金、はかり (共通物品)



上図の円筒は、乾電池 4 本を適宜任意の穴に入れることにより自由にその重心位置を変えることができる。この円筒の運動について考える。この 4 本の乾電池はいずれの穴にも入れることができ、一つの穴には乾電池一本のみ入れられる。以下では乾電池を入れる穴を上図のアルファベットと数字で示す。例えば、S1 と E1 の穴に乾電池を入れるときは [S1.E1] と記述する。上図の例では、[S3] となる。また、この円筒は鉛直方向に自立することができ、安定して転がることできる。

問 1 [S4.E4.N4.W4], [S3.E3.N3.W3], [S2.E2.N2.W2], [S1.E1.N1.W1] が斜面を転がる時の運動の様子を観察し、その違いを定量的に検討しなさい。また、その違いが生まれる原因を考察しなさい。実験にあたっては、準備されている物品のみを使用し、その実験装置の構成を図解するとともに、実験の手順および留意点を記しなさい。

問 2 [S4.E4.W4], [S4.E3.W3], [S4.E2.W2], [S4.E1.W1] の水平面における周期運動（起き上がり小法師運動）を観察し、それらの周期を測定しなさい。測定された周期の相違について考察し、その現象について図および文章を用いて説明しなさい。周期の測定においては、初期の振れ角が 45 度になるように調整しなさい。また図中に、それぞれの円筒の重心位置も明示しなさい。

問 3 問 2 と同じ条件で、[S4], [S3], [S2], [S1] の周期を測り、その違いが生まれる原因を考察しなさい。

問 4 問 2 と問 3 の結果から、どのような場合に振動の周期が長くなると考えられるか。乾電池を 4 本穴に入れた場合で最も振動の周期が長くなる配置を述べなさい。またそのように考えた理由も述べなさい。