平成２８年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I, II, III

(9:00–15:00)

注意事項

携帯電話,スマートフォンの電源を必ず切ってください。

・ 物理学コース

I, II の２題を解答してください。

・ フロンティアテクノロジーコース

I, II, III の中から２題を選択して解答してください。

[I]

ワイヤによって支えられているつり橋は様々な形でゆれる。例えば，1940 年に崩壊したタコマ橋の場合，図 1 の写真に示すように右と左の車線（橋の床版）がシーソーのようにゆれた。一般に振動数は，ポテンシャル（位置）エネルギーと運動エネルギーから求めることができる。問 $\boxed{1}$ で，ばねにつながれた小球（質点）の振動についてこのことを確かめたのち，問 $\boxed{2}$ で，つり橋がどのような周期でゆれるか簡単な模型を用いて考えよう [1]。

実際の試験では大きくゆれているタコマ橋の写真が掲載されていましたが，公開版の試験問題では削除しました。写真はインターネット等で検索してください。キーワードとして,「タコマ橋」で検索す ると，動画，写真や解説を多くのホームページで確認することができます。

図 1: 図 1：タコマ橋（1940 年）。多くの橋では，横から強風が吹くと，橋の床版が上下に運動する。タコマ橋は，写真に示すように橋の床版がシーソーのようにゆれ，その後崩壊した。

必要なら以下の数学公式を用いてよい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \\ \frac{d}{dt}\cos x &= -\sin x\,\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\sin x = \cos x\,\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

$|x|$ が十分小さいとき，x の 3 乗以上の項を無視できるので，次の近似式が成り立つ。

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x \approx x, \quad (1+x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2$$

[1] 本問題では，つり橋の構造を簡略化し，更にはさまざまな制約を課すため，実際の現象とは異なる可能性がある。興味があれば，試験後につり橋の詳細な記述の仕方を考え，本問題との相違点等を考察してみてください。

$\boxed{\mathbf{1}}$

A 図 2(A) のように，ばね定数が k の軽いばねに質量 m の小球をつけて天井の点 O からつるし，上下に振動させる。このとき小球は，角振動数 $\omega_a = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ で単振動する。ばねの自然長を ℓ_0，重力加速度の大きさを $g > 0$，点 O を原点，鉛直下方を x 軸の向きとして，次の問いに答えなさい。

(A-1) つりあいの状態にあるときの，ばねののび $\Delta\ell$，および重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和 U_0 を求めなさい。ここで，重力の位置エネルギーの基準点はばねの自然長の位置とする。

(A-2) 小球が振幅 A，角振動数 ω で単振動している場合を考える。つりあいの状態にあるときのばねの長さを $\ell_1 (= \ell_0 + \Delta\ell)$ とすると，おもりの座標は

$$x = \ell_1 + A\cos\omega t$$

と表される。小球の運動エネルギー T，および重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和 U を，m，k，A，ω，t，U_0 のうち必要なものを用いて表しなさい。

(A-3) まさつを無視すると，力学的エネルギー $E\ (= T + U)$ は保存される。このとき，$\omega = \omega_a = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ が満たされることを示しなさい。

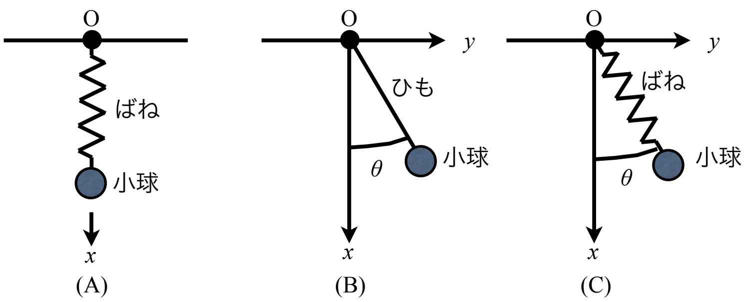


図 2

B 図2(B) のように，長さ ℓ_1 のひもと質量 m の小球でできた単振り子の振動を考える。ここで，重力加速度の大きさを $g > 0$，点Oを原点，鉛直下方を x 軸の向き，水平右方向を y 軸の向き，小球は xy 平面内を運動するとして，次の問いに答えなさい。

(B-1) 小球の位置 (x, y) とその時間変化 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を ℓ_1，θ，$\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。ここで，θ はひもと鉛直線のなす角度，$\dfrac{d\theta}{dt}$ はその時間変化を表す。
また，小球の運動エネルギー T，および重力の位置エネルギー U を，m，g，ℓ_1，θ，$\dfrac{d\theta}{dt}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。ここで，重力の位置エネルギーの基準点は小球が静止しているときの小球の位置とする。

(B-2) 角度が $\theta = B\cos\omega_b t$ で単振動するとして，角振動数 ω_b を求めなさい。ただし，$|\theta|$ は十分に小さいとして，問題文に与えられた近似式を用いること。

C 図2(C) のように，問Aで考えた小球が，上下だけでなく左右にもゆれる場合を考える。ばねは長さが ℓ で，鉛直線から角度 θ 傾いた直線状になっているとして，次の問いに答えなさい。

(C-1) 小球の位置 (x, y) とその時間変化 $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ を ℓ，$\dfrac{d\ell}{dt}$，θ，$\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。
また，小球の運動エネルギー T，および重力の位置エネルギーとばねの位置エネルギーの和 U を，m，k，g，ℓ，ℓ_0，$\dfrac{d\ell}{dt}$，$\dfrac{d\theta}{dt}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。ここで，重力の位置エネルギーの基準点は小球が静止しているときの小球の位置とする。

(C-2) ばねの長さ ℓ と角度 θ がそれぞれ，

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_1 + A\cos\omega_a t \\ \theta &= B\sin\omega_b t \end{aligned}$$

のように振動する場合（$\omega_a \neq \omega_b$）を考える。ただし，A と B は十分に小さい正の定数で，A^3，A^2B，A^4 など A や B について3次より高い次数の項は無視できるとする。また ℓ_1 は問(A-2)で用いたつりあいの状態にあるときのばねの長さを表す。エネルギー保存則が成り立つこと利用し，ω_a と ω_b を，m，k，g，ℓ_1 のうち必要なものを用いて表しなさい。

(C-3) この小球がどのような運動をするか，その軌跡を図示し簡単に説明しなさい。

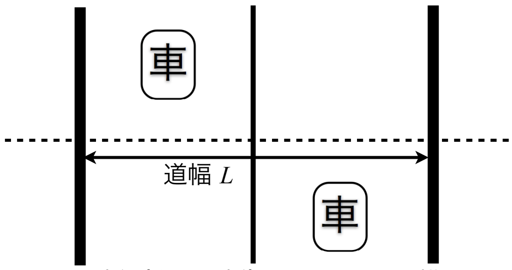
2

図１に見られるタコマ橋のゆれを考えるため，橋の一部（断面）を同じ種類の２本のばねにより支えられた棒と近似する模型（図３）を考えよう。棒は自動車が通る床を切り取ったもので，その長さは道幅 L と等しい。棒は十分に軽いが，その中心および両端に，質量 m の小球が取りつけられている（図３ (b)）。また，ばねのばね定数を k，自然長を ℓ_0 とし，橋を支えるばねの支点 (図では黒丸) は固定されていると考える。つりあいの状態では，ばねの長さはどちらも ℓ_1 であり，棒は水平に保たれている。つりあいの状態での棒の重心を原点，鉛直下方を x 軸の向き，水平右方向を y 軸の向きとする。棒は xy 平面内で以下の３種類の運動をする。

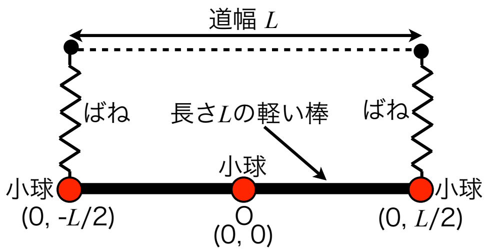
(A) 棒は水平を保ったまま上下に運動をする（図 4(A)）。

(B) 棒は水平を保ったまま主に横方向に運動をする（図 4(B)）。

(C) 棒はその重心の位置が移動せず，シーソーのような運動をする（図 4(C)）。



(a) つり橋（タコマ橋）を上から見た模式図



(b) 図(a)の点線での断面図

図３

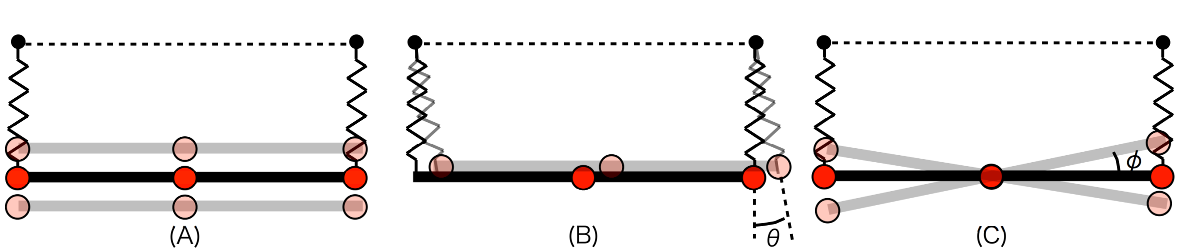


図４

以下では，左のばねの長さを ℓ_L，右のばねの長さを ℓ_R，ばねと鉛直線のなす角度を θ（図 4(B)），棒と水平方向のなす角度を ϕ（図 4(C)）とする。$|\theta|$，$|\phi|$ は十分小さいとして，微小量の 3 次以上を無視して下記の問いに答えなさい。

(A) 棒が水平を保ったまま上下に運動をする場合（図 4(A)）の角振動数を求めなさい。更に，表 1 の値を代入して振動周期を求めなさい。

(B) 棒が水平を保ったまま主に横方向に運動をする場合（図 4(B)）の角振動数を求めなさい。更に，表 1 の値を代入して振動周期を求めなさい。

次に，棒がその重心の位置を変えず，シーソーのような運動をする場合（図 4(C)）を考える。

(C-1) 左右の小球の座標 (x_L, y_L) および (x_R, y_R) を求めたのち，左右のばねがのびた長さ $\Delta\ell_L$ および $\Delta\ell_R$ を L，ℓ_1，ϕ，θ のうち必要なものを用いて表しなさい。

(C-2) 微小量の 2 次以上を無視して，$\Delta\ell_L$ および $\Delta\ell_R$ を L，ϕ を用いて表しなさい。

(C-3) この運動の角振動数を求めなさい。更に，表 1 の値を代入して振動周期を求めなさい。

表 1：タコマ橋のゆれを考える際に用いる値

名称	記号	数値	単位
小球の質量	m	1.0×10^3	kg
ばね定数	k	1.5×10^3	N/m
つりあいの状態でのばねの長さ	ℓ_1	50	m
重力加速度の大きさ	g	9.8	m/s^2

[II]

空気の主成分である窒素も，冷やすと液体となる。このような気体から液体への変化をファンデルワールスの状態方程式

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \tag{1}$$

を使って考えよう。この式で変数 p, V, T はそれぞれ 1 モルの窒素の圧力，体積，温度で，R は気体定数である。また a と b は窒素分子の性質を表す正の定数である。表 1 に示された値を用いて，方程式 (1) に関する以下の問いに答えなさい。ただし，この問題では $V > b$ かつ $p \geqq 0$ の場合だけを考える。

表 1: 気体を表す諸定数

名称	記号	数値
アボガドロ数	N_{A}	$6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
気体定数	R	$8.314\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$
窒素 N_2	a	$1.41 \times 10^{-1}\ \mathrm{Pa\ m^6\ mol^{-2}}$
	b	$3.92 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3\ mol^{-1}}$

1. 定数 b は，分子が有限の大きさを持っているため，いくら強い圧力をかけても体積はつねに $V > b$ となることを表している。表 1 の値をもとに窒素分子の大きさを考えよう。実際の窒素分子は鉄アレイのような形をしているが，ここでは立方体と仮定し，その辺の長さ ℓ を有効数字 3 桁で求めなさい。

2. 定数 a は分子の間に引力が働く効果を表している。体積 V を $V + \Delta V$ に増やすには，

$$\Delta W' = \frac{a}{V^2}\Delta V \tag{2}$$

だけのエネルギーがいる。1 モルのガスには N_A 個の分子が入ってお互いに引力をおよぼしているが，遠く離れた分子同士の引力は無視できるので分子同士の引力のエネルギーは

$$U \ = \ N_A u(r) \tag{3}$$

と近似することができる。ここで $u(r)$ は分子 1 個あたりの引力のエネルギー，r は

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^3 N_{\mathrm{A}} \ = \ V \tag{4}$$

により定義される分子間の平均距離である。引力のエネルギー $u(r)$ を求めなさい。

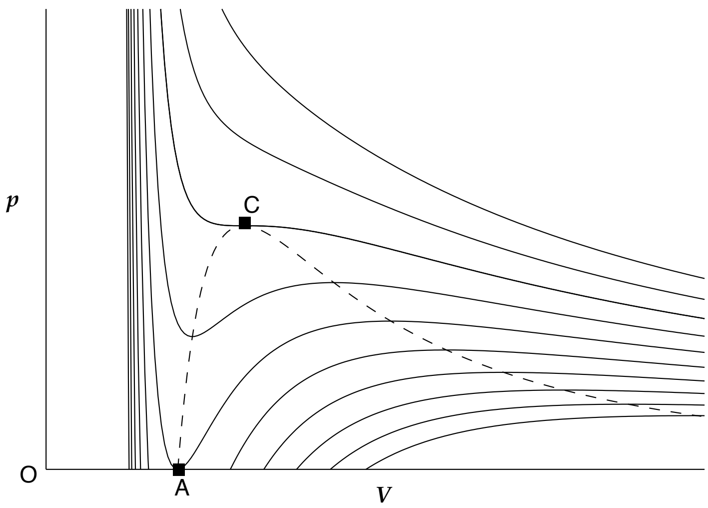


図 1: ファンデルワールスの状態方程式の $p-V$ 図。各実線は，温度を一定に保ってこの体系を変化させた場合の圧力と体積の関係を表している。各実線の上で圧力 p は，破線との交点で極小あるいは極大となる。

3. 温度を一定に保ったまま体積 V を変化させると，圧力 p は図 1 の破線との交点で極大あるいは極小となる。この破線を表す関数 $p = p(V)$ を求めなさい。

4. 図 1 の点 A では圧力が 0 となる。点 A での体積 V_{A} を求め，温度が $T_{\mathrm{A}} = a/(4bR)$ であることを示しなさい。

5. 図 1 の破線上で圧力が最大となる点 C での体積 V_{C}，温度 T_{C}，圧力 p_{C} を求めなさい。また表 1 の値を用いて，T_{C} を有効数字 3 桁で求めなさい。

(次頁につづく)

6. 理想気体では圧力と温度が与えられれば，体積は $V = RT/p$ により求まる。しかしファンデルワールスの状態方程式では，$p < p_{\mathrm{C}}$ の場合，温度と圧力が同じ値となる体積が3つ存在する。ただし，図1で破線より下の状態は，問7で述べる理由により安定に存在できない。このことを考慮して温度が $T = T_{\mathrm{A}}$ のとき，安定な状態が存在しない範囲 $V_{\min} < V < V_{\max}$(図2) を求めなさい。

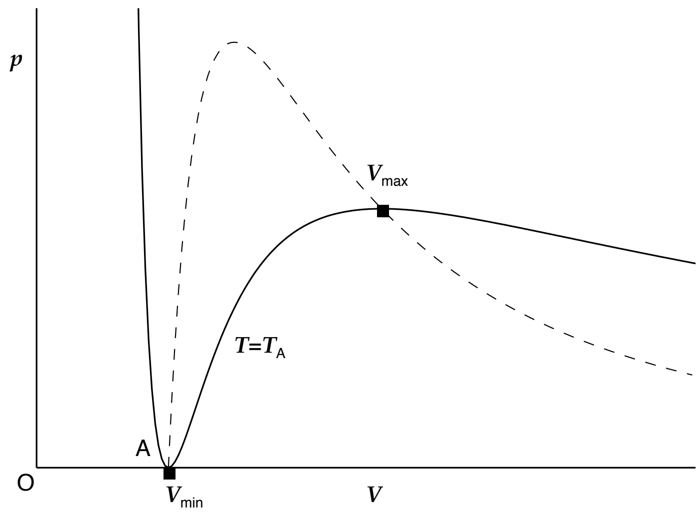


図 2: 温度が T の場合の体積 V と圧力 p。

7. 温度が一定に保たれている場合，図1で破線より下の領域では体積が増えると圧力が上がるので，少しでも膨張して体積が増え始めると，圧力が再び元の値に戻るまで膨張が止まらない。マックスウェルは等温線と等圧線を結んだサイクルを考え，この膨張の際に発生する熱が

$$Q \;=\; \int_{V_2}^{V_3} p dV - p_2 (V_3 - V_2) \qquad (5)$$

であることを示した (図3を参照のこと)。ここで V_2 と p_2 は不安定な状態での体積と圧力で，V_3 は圧力が p_2 となる体積である。式 (5) の右辺第1項は温度を一定に保ちながら膨張する場合の仕事，第2項はその周囲においた理想気体になされた仕事である。同様に体積が減少して V_1 へと変化した場合に発生する熱は

$$Q' \;=\; \int_{V_2}^{V_1} p dV - p_2 (V_1 - V_2) \qquad (6)$$

と表される。不安定な状態からの膨張により発生する熱 $Q = Q(V_2, V_3)$，収縮により発生する熱 $Q' = Q'(V_2, V_1)$ を求めなさい。なお膨張や収縮の間，温度は一定に保たれているとして式 (5) および式 (6) の積分を行うこと。

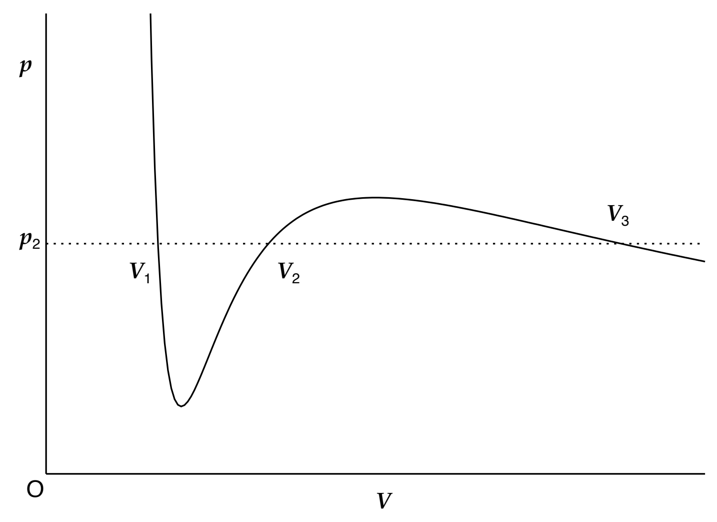


図 3: 実線はある温度での圧力 p と体積 V の関係を表す。体積が V_1, V_2, V_3 のときの圧力はいずれも p_2 で等しい。実線と点線で囲まれた領域の面積は，式 (5) と (6) の右辺に等しい。

8. マックスウェルは，不安定な状態は発生する熱が多いほうに遷移しやすいという仮説を立てた。この仮説に従い，温度が $T = T_\mathrm{A}$ で体積が $V_2 = 4b$ の状態は，膨張するか収縮するか答えなさい。

9. 前問の結果は，温度が T_A で圧力が $p_2 = RT_\mathrm{A}/(V_2 - b) - a/V_2^2$ のとき，膨張するか収縮するかを判定する基準を与えていると読み替えることができる。この説に従い，温度を T_A に保ったまま圧力を p_C から徐々に下げていったときどのような変化が期待できるか述べなさい。

10. ファンデルワールスの方程式では，気体から液体への変化や液体の性質についてどのようなことが説明できるだろうか。気づいたことを箇条書きで示しなさい。

[Ⅲ]

建物や橋などの構造物は，自身の重量や構造物の上に加わる車両や人の重量といった力に耐えられるように設計されている。同じ太さの材料を使っても形を工夫すれば，変形が小さくなる。構造物における形と力，変形について，以下の問いに答えなさい。なお，実験においては精度良く結果が得られるように各自で工夫して取り組みなさい。安全のため，実験時は安全めがねを着用し，棒や試験体は水平に置いた架台と透明アクリル保護板ではさんで，ねじでしっかり固定して行いなさい。

実験において，以下の物品は自由に使用して良い。

・実験ボード（架台 A～C が記された木製の台＋透明アクリル板）
・直定規
・A4 版方眼用紙（1mm）
・バネばかり
・テグス
・はさみ
・プラスチック棒
・試験体①～⑤
・安全めがね
・細字マジック
・三角定規セット
・セロハンテープ

1．図 1-1 のように，長さ 350mm のプラスチック棒 1 本を，架台のねじ棒を支点として左右のバランスよく架台に置く。図 1-2 のようにプラスチック棒の中央位置に力を加え，プラスチック棒をたわませる（ここでは，棒の中央位置が元の位置から下がった距離を「たわみ」と呼び，たわみを生じさせることを「たわませる」と記す)。プラスチック棒に働く力とたわみ，架台のねじ棒の間隔の関係について，実験で調べてみよう。

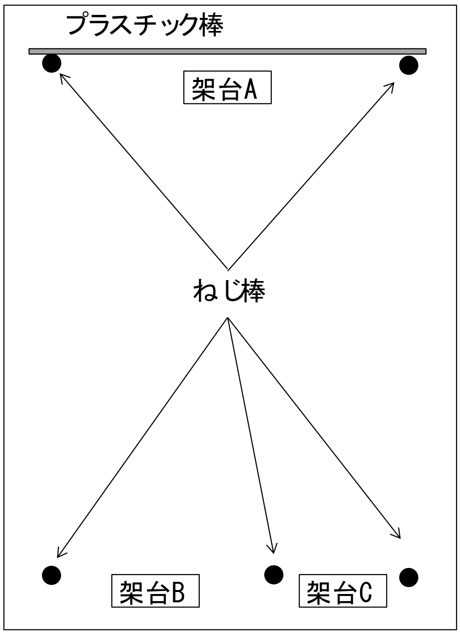


図 1-1　棒の置き方

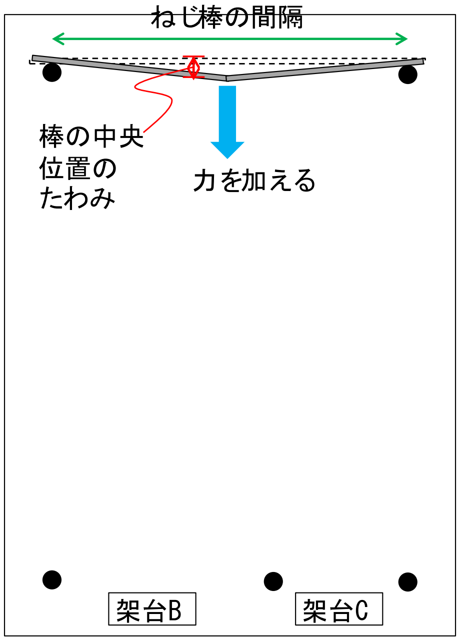


図 1-2　棒に加わる力と変形，ねじ棒の間隔

(1) ねじ棒の間隔 300mm の架台 A にプラスチック棒を置き，中央位置に力を加えてたわませる。ここで，0cm より大きく 5cm 以下の範囲で異なるたわみの値を 5 点以上，各自で設定し，それぞれのたわみを生じさせる力の大きさを計測しなさい。計測結果から縦軸に力，横軸にたわみをとったグラフを描き，そのグラフの特徴を述べなさい。

(2) ねじ棒の間隔を狭くした架台 B（ねじ棒の間隔 200mm)，架台 C（ねじ棒の間隔 100mm）にそれぞれプラスチック棒を置き，(1)と同様に中央位置に力を加えて同様にたわみを計測しなさい（たわみは異なる値を 5 点以上各自で設定する)。計測結果から縦軸に力，横軸にたわみをとったグラフを描き，そのグラフの特徴を述べなさい。また，ねじ棒の間隔が小さくなるとグラフの特徴はどのように変化するかについても述べなさい。

(3) この実験において，力とたわみをどう計測するかが重要となる。どのような用具を用い，どのような点に工夫して計測したか説明しなさい。

２．構造物において，棒が縦と横だけでなく斜めに入ると一般的にその強度が増すことが知られている。このことを調べてみよう。

(1) 図 2-1 に示すような試験体①～⑤（図 2-1）がある。これらの試験体は幅が 300mm 一定で，重さが同じ（使われている棒の長さの総和が同じ）となっているが，V の字形の斜めの棒の本数と高さがそれぞれの試験体で異なる。試験体を図 2-2 のように架台に置き，中央位置のひもを用いて 300gf で引っ張った時，試験体の状態を観察し，元の形からどのように変形しているか図示しなさい。また，棒の曲がり具合など変形の特長について，各試験体について説明しなさい。

(2) (1)で実験した試験体のうち，変形が最も小さいのはどの試験体か示しなさい。また，そうなった理由を考察しなさい。

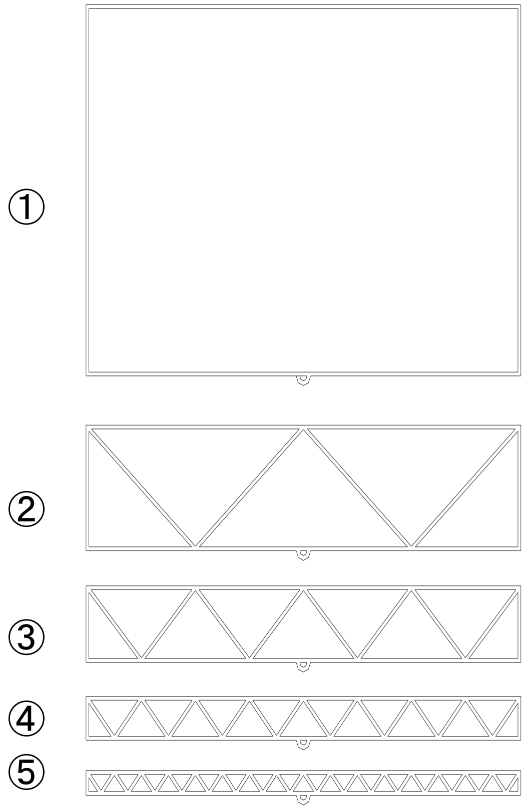


図 2-1　試験体一覧

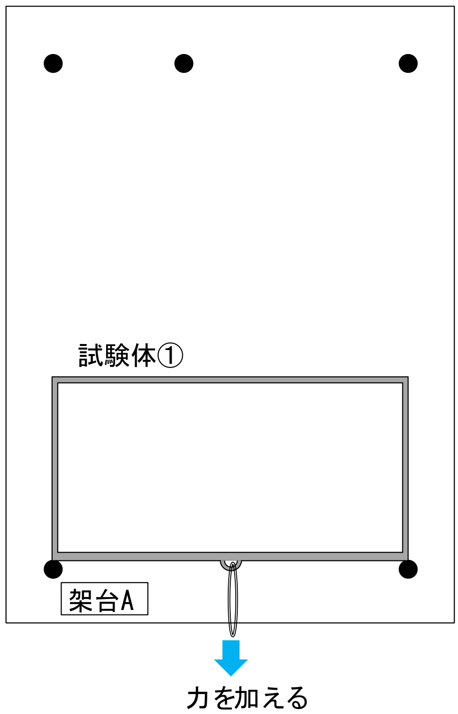
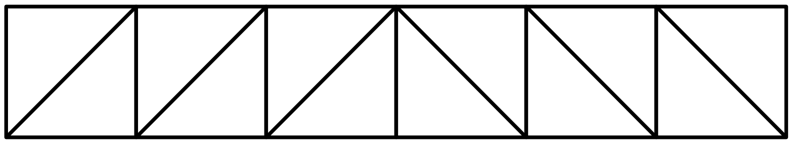
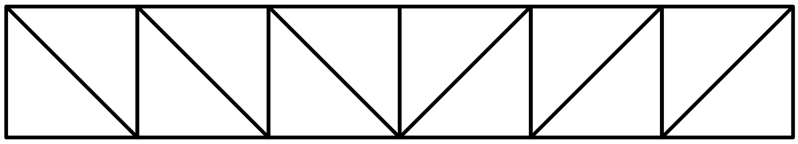


図 2-2　試験体の置き方と力の加え方

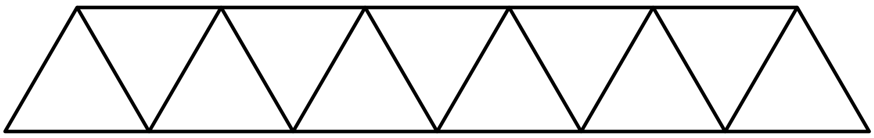
３．3 本の棒の両端をそれぞれつないで三角形を構成したものをトラスと呼ぶ。トラスが連続して組み合わさったものがトラス構造物であり，身の回りには様々な種類のトラス構造物が存在している。一例としてハウトラス，プラットトラス，ワーレントラスが挙げられる（図 3)。



ハウトラス



プラットトラス



ワーレントラス

図３　トラスの種類（例）

ここで，300mm の間隔にかけるトラス構造物を設計してみよう。条件は以下の通りとする。

・使用する材料はプラスチック棒（１．で用いた物と同様）とする
・使用できる棒の総長さは 1,500mm（300mm の長さの 5 倍）以内とする
・棒の両端は連続的に接続されており，棒同士の厚みの重複は考えない
・トラス構造物にかかる力は構造物の下側中央位置のみとする

このような条件の下で，より強固なトラス構造物になるように自由に設計し，形状・寸法を図示しなさい。またそのように設計した理由を記述しなさい。