平成２９年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 II

解答例

解答例：課題 II

出題意図

生体の断層画像を得られる光コヒーレンストモグラフィー技術を題材に、光の干渉やドップラー効果などを理解しているか、またそれを計算で示せるかを試す問題を作成した。

高校では位相が同じとき 2 つの光は強め合い、逆位相の時には弱め合うことを習う。これは振動数が完全に同一な場合である。振動数がわずかに異なる時、位相がほぼ同じ時と反対の時が交互に現れてうなりが生じる。実際に光の強度変化を計算し、うなりの発生を示すのが A の設問である。電磁場の変化から特定の周波数成分を求める計算 (フーリエ変換) は難しいので、光の強度を周期 T の時間での平均と等しいと定義した。定性的には厳密な計算と同等の結果が得られる。

設問 B では片方の反射鏡を動かすことにより光が明暗する状況を考えた。可動反射鏡が動くと光路長が変わると同時に、反射された光の周波数がドップラー効果により変化する。周波数や光路長の変化から光の強度変化を求めてもらうのが設問 B であるが、この結果は光の明暗から反射鏡の位置を特定できることを示している。動かない反射鏡の代わりに生体を置くと、生体の中で光を反射している場所を知ることができる。これが光コヒーレンストモグラフィーの原理に他ならない。

この原理を用いた実際の測定器では、ある一瞬だけ光が発生するパルス光が用いられる。一つのパルスが発生している極めて短い時間の間には、光は時間的・空間的な一様性（＝コヒーレンス）が高いとみなすことができる。このようなパルス光を正しく扱うには大学レベルの数学が必要である。また光のドップラー効果を厳密に扱うためには特殊相対論が必要である。しかし生体の断層画像を得るための技術の本質は高校の物理から学べると感じてもらえればありがたい。

この設問を解くためには、三角関数の加法定理や積分を駆使する力も必要である。煩雑であるが積分により消える項を正しく判別する力を養ってもらいたい。

A.

問 1 波長: $\lambda = 2\pi c/\omega$

周期: $T = 2\pi/\omega$

問 2

$$\begin{aligned}\langle\cos\omega' t\rangle_T &= \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}\cos\omega' t dt' = \frac{\sin\omega'\left(t+\dfrac{T}{2}\right)-\sin\omega'\left(t-\dfrac{T}{2}\right)}{\omega' T}\\ &= \frac{2\cos\omega' t\sin\dfrac{\omega' T}{2}}{\omega' T} = \frac{\omega}{\pi\omega'}\cos\omega' t\sin\left(\pi\frac{\omega'}{\omega}\right)\end{aligned}$$

問 3

$$I\left(x,t\right) = \frac{\epsilon_0 c}{2}\left\langle E(t)^2\right\rangle_T = \frac{\epsilon_0 c}{2}\left\langle E_0^2\sin^2\left\{\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\right\rangle_T = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{4}$$

問 4 (a)

$$\begin{aligned}&\left\langle\{A\sin\omega t + B\sin(\omega+\Delta\omega)t\}^2\right\rangle_T\\ = \quad &\left\langle A^2\sin^2\omega t + 2AB\sin\omega t\sin(\omega+\Delta\omega)t + B^2\sin^2(\omega+\Delta\omega)t\right\rangle_T\end{aligned}$$

各項を計算する。

第 1 項：

$$\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle_T = \left\langle\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right\rangle_T = \frac{1}{2}$$

第 2 項：

$$\begin{aligned}&\langle\sin\omega t\sin(\omega+\Delta\omega)t\rangle_T = \left\langle -\frac{1}{2}\left\{\cos(2\omega+\Delta\omega)t - \cos\Delta\omega\right\}\right\rangle_T\\ = \quad & -\frac{1}{2}\left\{\frac{\omega}{\pi(2\omega+\Delta\omega)}\cos(2\omega+\Delta\omega)t\sin\left(\frac{\pi(2\omega+\Delta\omega)}{\omega}\right) - \frac{\omega}{\pi\Delta\omega}\cos\Delta\omega t\sin\left(\pi\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)\right\}\end{aligned}$$

第 3 項：

$$\begin{aligned}\left\langle \sin^2(\omega+\Delta\omega)t \right\rangle_T &= \left\langle \frac{1-\cos 2(\omega+\Delta\omega)t}{2} \right\rangle_T \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\omega}{2\pi(\omega+\Delta\omega)}\cos 2(\omega+\Delta\omega)t \sin\left(2\pi\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}\right)\end{aligned}$$

以上から,

$$\begin{aligned}\left\langle \{A\sin\omega t + B\sin(\omega+\Delta\omega)t\}^2 \right\rangle_T = & \frac{A^2+B^2}{2} \\ & -AB\frac{\omega}{\pi(2\omega+\Delta\omega)}\cos(2\omega+\Delta\omega)t\sin\left(\pi\frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \\ & +AB\frac{\omega}{\pi\Delta\omega}\cos\Delta\omega t\sin\left(\pi\frac{\Delta\omega}{\omega}\right) \\ & -\frac{B^2}{2}\frac{\omega}{2\pi(\omega+\Delta\omega)}\cos 2(\omega+\Delta\omega)t\sin\left(2\pi\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} \to 0$ の極限をとると,

（第 2 項）$\to -AB\dfrac{\omega}{2\pi\omega}\cos 2\omega t \sin\left(\pi\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right) \to 0$

（第 3 項）$\to AB\dfrac{\omega}{\pi\Delta\omega}\cos\Delta\omega t \sin\left(\pi\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right) \to AB\cos\Delta\omega t$

（第 4 項）$\to -\dfrac{B^2}{2}\dfrac{\omega}{2\pi\omega}\cos\omega t \sin\left(\pi\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right) \to 0$

よって,

$$\left\langle \{A\sin\omega t + B\sin(\omega+\Delta\omega)\}^2 \right\rangle_T \cong \frac{A^2+B^2+2AB\cos\Delta\omega t}{2}$$

問 5 問 4(b) で $A \to E_0$, $B \to \alpha E_0$, $t \to t - \dfrac{x}{c}$ と置き換えて,

$$\begin{aligned}I(x,t) &= \frac{\epsilon_0 c}{2}\left\langle \left[E_0\sin\left\{\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\} + \alpha E_0 \sin\left\{(\omega+\Delta\omega)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\right]^2 \right\rangle_T \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2}\left[\frac{E_0^2+\alpha^2E_0^2}{2} + \alpha E_0^2\cos\left\{\Delta\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\right] \\ &= \frac{\epsilon_0 c(E_0^2+\alpha^2E_0^2)}{4}\left[1+\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cos\left\{\Delta\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\right]\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\epsilon_0 c(1+\alpha^2)}{4}E_0^2 \\ V &= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \phi &= \Delta\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) \end{aligned}$$

B.

問 1 経路 1 と経路 2 の長さの差は $2(L_0 - L)$。これが波長の整数倍となれば二つの光は強め合い光の強度は最大になるので，$2(L_0 - L) = \dfrac{2\pi nc}{\omega}$ (n は整数)

問 2 時刻 t における経路 1 と経路 2 の光路差は $2(L_0 - L) + 2vt$。つまり，毎秒 $2v$ で光路差が変化する。光路差が波長だけ変化するのに必要な時間が明暗の周期となるから，周期を τ とすると $2v\tau = \lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$。よって，$\tau = \dfrac{\pi c}{v\omega}$

問 3 **(a)** 時刻 t_1 における可動鏡と半透鏡の距離は $L_0 + vt_1$。したがって，光が可動鏡に到達するのは $t_1 + \dfrac{L_0 + vt_1}{c - v}$。往路と復路は同じ時間が掛かるので，

$t_2 = t_1 + \dfrac{2(L_0 + vt_1)}{c - v}$

(b) $t_2 + \Delta t_2 = t_1 + \Delta t_1 + 2\dfrac{L_0 + v(t_1 + \Delta t_1)}{c - v} = t_2 + \dfrac{c + v}{c - v}\Delta t_1$

よって，$\Delta t_2 = \dfrac{c + v}{c - v}\Delta t_1$

(c) $\omega' = \omega\dfrac{c - v}{c + v}$

(d) 明暗の周期は $\dfrac{\pi(c + v)}{v\omega}$

問 4 光の電場の二乗が強度になることを考えると，反射率が β のとき，光の電場 E_1 は反射されて $\sqrt{\beta}E_1$ となる。したがって，A. 問 5 の解答で $\alpha = \sqrt{\beta}$ とすればよく，コントラストは $\dfrac{2\sqrt{\beta}}{1 + \beta}$ となる。