平成２９年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題 Ⅰ

解答例

解答例：課題Ⅰ

出題意図

物体を円板の上に乗せて回転させると，物体は外側に力を受けて飛び出そうとします。このような円板上での物体の運動を力学的に扱うとき，二つの考え方があります。一つは回転している物体と一緒に回転している観測者から考える方法，もう一つは回転している円板の外から物体の運動を考える方法です。前者の場合，観測者は加速度運動をしているために慣性力を考える必要が出てきます。本問題では，特に慣性力の中でも遠心力と呼ばれる外向きにかかる力に着目し，小球の運動を考えます。この問題では，小球は溝に沿った運動しかしないので，速度に垂直な方向にはたらくコリオリ力を考える必要はありません。重要なのは小球と一緒に回転している観測者からみると，遠心力は重力のように位置エネルギーのようなもの（大学の物理ではポテンシャルといいます）を持つところです。そのため，エネルギー保存則で考えると小球の運動をわかりやすく記述することができます。円板から飛び出すまでの運動は，円板と一緒に回転している観測者の視点で考えられるのですが，円板の外から見ている観測者からみた，円板から飛び出した後の小球の速度は，円板の回転速度も考慮する必要があります。つまり，速度の向きを考えて速度の合成をする必要があるのです。後半の問題では，円の中心を通らない溝から飛び出た小球の速さが最大と最小になる場合を考えますが，これは，円板が回転していることにより得られる速度と，円板と一緒に回転している観測者からみた円板から飛び出す小球の速度が，ともに大きく，かつ，できるだけ同じ向きを向くときに速さが大きくなります。この事実は，遠心ポンプの形状の設計する際にも考慮されています。その条件を数学を使って計算してみてほしいというのがこの問題の最終的な課題です。そのためには，物理の力学の知識だけではなく，数学の微積分を使いこなす力が必要となってきます。

問１は基礎的な力学，特に摩擦を扱う問題ですので，大学に進学する際には必ず解けてほしい問題であり，30 点の配点とします。問２は，問１の考え方を応用し，慣性力である遠心力を仕事の観点から考える応用問題です。計算自体はあまり難しくないので，じっくりと説明を読んだり，教科書などを調べて解答にたどり着いてほ

しいと思います。この問 2 までできる方は大学 1 年生の講義にも対応できる応用力があると思われます。その意味で，問 2 は 40 点の配点をしています。問 3 は力や速度をベクトルとしてしっかり理解し，数学のベクトルや微積分の知識を活用して問題を解いていかなければならない，非常に高度な問題であるといえます。問 3 には 30 点を配点します。

問 1 (a) 垂直抗力が mg となるので摩擦力の大きさは $\mu' mg$。外向きを正にしているので，$-\mu' mg$。

(b) 仕事 W_1 は

$$W_1 = \int_0^r F_1(r')dr' = \int_0^r (-\mu' mg)dr' = -\mu' mgr$$

(c) エネルギー保存則により，初期に持っていた運動エネルギーと摩擦力によってされた仕事の和がその位置まで動いたときの運動エネルギーと考えられる。よって

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \mu' mgR \geqq 0$$

ならば，端まで到達する。すなわち条件は，$v_0 \geqq \sqrt{2\mu' gR}$。

(d) (c) と同様にエネルギー保存則で考え，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \mu' mgR = \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

よって，$v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2\mu' gR}$。

問 2 (a) 小球には遠心力がはたらく。その大きさは $ma\omega^2$ で外向きである。つまり，$F_2(r) = mr\omega^2$。

(b) **問 1** と同様に，

$$W_2 = \int_0^r mr'\omega^2 dr' = \frac{m\omega^2}{2}r^2$$

(c) 半径 r の点での速さを v_2 とすると，**問 1** と同様にエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{m\omega^2}{2}r^2 = \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

となる。これより，$v_2 = \sqrt{{v_0}^2 + \omega^2 r^2}$。

(d) 円板から飛び出すとき，円板の端の速さは ωR であり，これは溝に垂直な速度成分となる。また，円板の溝に平行な速度成分は回転している円板と一緒に運動している観測者から見ても同じである。よって，溝に平行な成分は $\sqrt{{v_0}^2 + \omega^2 R^2}$，溝に垂直な成分は ωR となる。

問 3 (a) 遠心力は大きさ $m\omega^2\sqrt{\ell^2+x^2}$ で動径方向の外向きにはたらく。溝に沿った向きの成分は，幾何学的に考えて，その $\dfrac{x}{\sqrt{\ell^2+x^2}}$ 倍であるので，

$$F_3(x) = m\omega^2\sqrt{x^2+\ell^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}} = m\omega^2 x$$

(b) **問 1** や **問 2** と同様に仕事を計算すると，

$$W_3 = \int_0^x F(x')dx' = \int_0^x m\omega^2 x' dx' = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

である。よって，速さは

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 = \frac{m}{2}{v_3}^2$$

より，$v_3 = \sqrt{{v_0}^2+\omega^2 x^2}$。

(c) $v_0 = 0$ と近似できるので，円板と一緒に運動する観測者からみた，小球が飛び出すときの速さは $\omega\sqrt{R^2-\ell^2}$ となる。角 AOB の大きさを θ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{\ell}{R}$。また，円板の端での円板の速度は接線方向に ωR である。これらを考慮して，余弦定理より，

$$u_{\mathrm{B}}(\ell)^2 = (\omega R)^2 + \left(\omega\sqrt{R^2-\ell^2}\right)^2 - 2\omega^2 R\sqrt{R^2-\ell^2}\cos\theta$$

これより，

$$u_{\mathrm{B}}(\ell) = \omega\sqrt{2R^2-\ell^2-2\ell\sqrt{R^2-\ell^2}}$$

(d) (c) とほぼ同様に考えられるが，飛び出す点が C であるため，速度の向きが逆である。よって，

$$u_{\mathrm{C}}(\ell)^2 = (\omega R)^2 + \left(\omega\sqrt{R^2-\ell^2}\right)^2 - 2\omega^2 R\sqrt{R^2-\ell^2}\cos(\pi-\theta)$$

が成立する。これより，

$$u_{\mathrm{C}}(\ell) = \omega\sqrt{2R^2-\ell^2+2\ell\sqrt{R^2-\ell^2}}$$

(e) $u_{\mathrm{B}}>0$，$u_{\mathrm{C}}>0$ より，これらの増減と二乗したものの増減は一致する。

すなわち $g_\pm(\ell)=2R^2-\ell^2\pm 2\ell\sqrt{R^2-\ell^2}$ (複号同順) とおくと，$u_{\mathrm{B}}=\omega\sqrt{g_-(\ell)}$，$u_{\mathrm{C}}=\omega\sqrt{g_+(\ell)}$ である。定義域は $0<\ell<R$ であることに注意しなければならない。

$$\frac{dg_\pm}{d\ell}=-2\ell\pm\left(2\sqrt{R^2-\ell^2}+2\ell\frac{-2\ell}{2\sqrt{R^2-\ell^2}}\right)=2\left(-\ell\pm\frac{R^2-2\ell^2}{\sqrt{R^2-\ell^2}}\right)$$

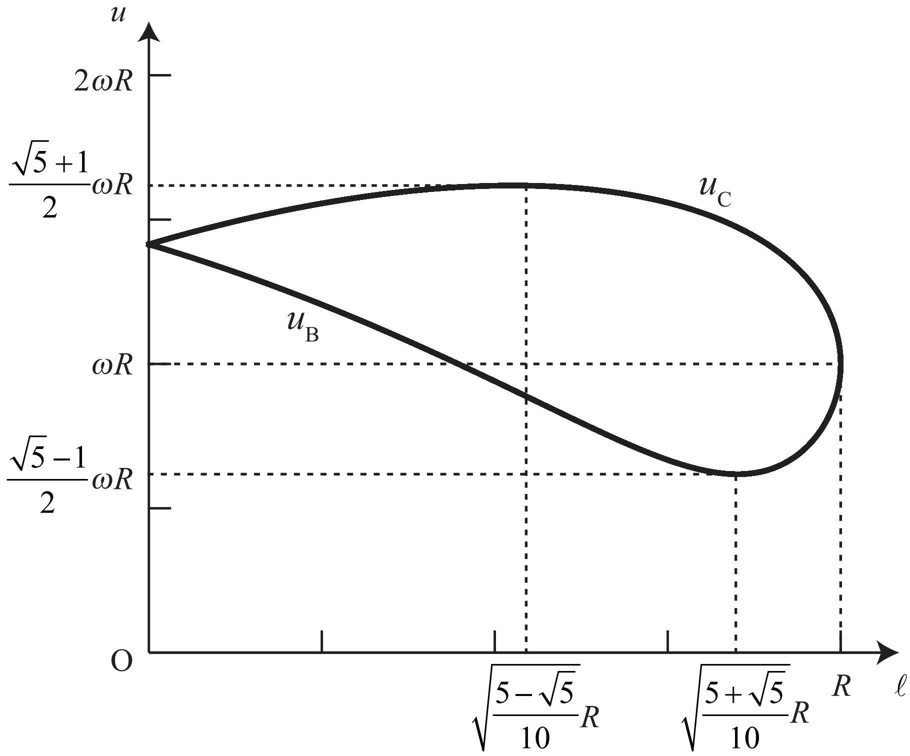
と計算できるので，$\dfrac{dg}{d\ell}=0$ より，

$$\ell^2(R^2-\ell^2)=(R^2-2\ell^2)^2$$

これを解くと，$\ell^2=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}R^2$ であり，これが $\dfrac{dg}{d\ell}$ が 0 になる候補である。$\ell>0$ を考慮して代入してチェックすることで，g_+ は $\ell^2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}R^2$ で極大値 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}R$ を，g_- のときは $\ell^2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}R^2$ で極小値 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}R$ をとることが分かる。

これらよりグラフの概形は以下のように描ける。

ただし，$\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\fallingdotseq 0.618$，$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\fallingdotseq 1.618$ を用いた。



(f) (e) より，速さの最大値は

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\omega R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\omega R$$

となる。また，最小値は

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\omega R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega R$$

となる。

参考までに，最大値をとるとき，$\ell = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}R \fallingdotseq 0.851R$，角 AOB は $\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ となるような $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ を満たす角 $\theta_1 \fallingdotseq 58.28^\circ$ となり，最小値をとるとき，$\ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}R \fallingdotseq 0.526R$，角 AOC は $\cos\theta_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ となるような $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ を満たす角 $\theta_2 \fallingdotseq 31.72^\circ$ となる。

問 3(c),(d),(e) については ℓ の代わりに角 AOB または，角 AOC の大きさ θ を考えると式変形が多少簡単になる。

角 AOB を θ とすると，点 B から飛び出すときの，円板と一緒に回転している観測者からみた小球の速度は，円板がちょうど図 3 の位置のときに小球が飛び出したとすると，$(\omega R\sin\theta, 0)$ となる。一方，回転する円板の点 B の速度は $(-\omega R\cos\theta, \omega R\sin\theta)$ である。よって，速度の合成をすると，円板の外から見た小球の速度は $\omega R(-\sin\theta+\cos\theta, \sin\theta)$ となる。よってこの速度の大きさ $u_{\mathrm{B}}(\theta)$ は

$$\begin{aligned}
u_{\mathrm{B}}(\theta) &= \omega R\sqrt{(-\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} \\
&= \omega R\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta} \\
&= \omega R\sqrt{1-\sin 2\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta} \\
&= \omega R\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta+\alpha)}
\end{aligned}$$

ここで，角 α は，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる角である。θ の定義域が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることから，この場合，$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる角 θ のときに最小値 $\omega R\sqrt{\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=\omega R\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ をとることがわかる。最大値は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\omega R\sqrt{2}$ となる。

同様に，角 AOC を θ とすると，C から飛び出すときの，円板と一緒に回転している観測者からみた小球の速度は，円板がちょうど図 3 の位置のときに小球が飛び出したとすると $(-\omega R\sin\theta, 0)$ となる。一方，回転する円板の点 C の速度は $(-\omega R\cos\theta, -\omega R\sin\theta)$ である。よって，速度の合成をすると，円板の外から見た小球の速度は $\omega R(-\sin\theta-\cos\theta, -\sin\theta)$ となる。よってこの速度の

大きさ $u_{\mathrm{C}}(\theta)$ は

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{C}}(\theta) &= \omega R\sqrt{(-\sin\theta-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2} \\
&= \omega R\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta} \\
&= \omega R\sqrt{1+\sin 2\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta} \\
&= \omega R\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\alpha)}
\end{aligned}
$$

ここで，角 α は，上と同様 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる角である。θ の定義域が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることから，この場合，$2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる角 θ のときに最大値 $\omega R\sqrt{\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=\omega R\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ をとることがわかる。最小値は $\theta=0$ のとき ωR となる。

よって，最大値，最小値はそれぞれ

$$
\omega R\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}=\omega R\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \omega R\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}=\omega R\frac{\sqrt{5}-1}{2}
$$

となる。グラフの概形は ℓ と θ の関係を考えつつ描けばよい。

参考（大学レベルで考えると）

静止座標系での加速度 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，回転座標系での加速度 $\dfrac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，回転座標系での速度 $\dfrac{d'\boldsymbol{r}}{dt}$ は

$$
\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\frac{d'\boldsymbol{r}}{dt}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}
$$

の関係がある。ここで，右辺の第 2 項が遠心力に相当する。今，$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_z$ で，かつ，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_z=0$ より，

$$
\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-\omega^2\boldsymbol{r}
$$

とできる。これが，遠心力に相当する。今回の問題では，ω が一定なので，右辺の第 4 項は消え，また，右辺第 3 項 (コリオリ力) は $\boldsymbol{r}\cdot\left(2\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{d'\boldsymbol{r}}{dt}\right)=0$ となるため，仕

事はしない（今，溝の中での小球の運動を考えているので，$\boldsymbol{r}$ と $\dfrac{d'\boldsymbol{r}}{dt}$ は平行である)。

平面極座標 (r,θ) で運動方程式をたてて考える。円板外の観測者から見て運動方程式は,

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = N\boldsymbol{e}_\theta$$

となる。ただし，N は溝から受ける垂直抗力である。平面極座標で加速度を表すと

$$\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\boldsymbol{e}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{e}_\theta = N\boldsymbol{e}_\theta$$

よって，動径方向の運動方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$$

となり，これを解けばよいことがわかる。この微分方程式の一般解は

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

と書けるので，$t = 0$ で速度 v_0 の場合には

$$r = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t)$$

と書ける。$r = R$ となるのは,

$$t = \frac{1}{\omega}\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)$$

のときであり，そのときの速度は

$$\begin{aligned} v &= v_0\cosh\left(\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)\right) \\ &= v_0\cosh\left(\mathrm{arccosh}\sqrt{1+\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)^2}\right) \\ &= v_0\sqrt{1+\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)^2} \\ &= \sqrt{{v_0}^2+\omega^2R^2} \end{aligned}$$

となる。

　溝が中心からずれている場合には，回転座標系で考えて，

$$\frac{d'^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - \omega^2\boldsymbol{r} + 2\omega\boldsymbol{e}_z \times \frac{d'\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

ただし，$\boldsymbol{N}$ は溝の壁による垂直抗力である。今，溝に拘束されているので、$\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r} = \ell\boldsymbol{e}_y + x\boldsymbol{e}_x$ と書ける。また，垂直抗力は $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{e}_y$ と書ける。x 方向の運動方程式を書くと

$$\frac{d'^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$$

が得られる。これは，上と同じ微分方程式となっており，同様に解くことができる。