平成２９年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学

解答例

解答例：数学

問 1 $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると，

$$x^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4 \times \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

であるので，$r^4 = 2^2$，$4\theta = \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi$（ただし，$n$ は整数）である。これより，$r = \sqrt{2}$，$\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n}{2}\pi$ である。したがって，

$$x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)}{2},\quad \frac{\sqrt{2}(-1+\sqrt{3}i)}{2},\quad \frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3}+i)}{2},\quad \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}i)}{2}$$

問 2

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} + \cdots \\
&\quad + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}
\end{aligned}$$

問 3 $X = \log_3 x$ とおくと，

（方程式の左辺）$= \log_3 x - \dfrac{\log_3 9}{\log_3 x} = X - \dfrac{2}{X}$

であるから，2 次方程式

$X^2 + X - 2 = 0$

を解けばよく，その解は，

$(X+2)(X-1) = 0$

より，

$X = -2,\ 1$

である。したがって，

$x = \dfrac{1}{9}$，3

である。ともに正であるので，真数条件を満たしており解として適である。

問 4 **(1)** 8 つの頂点から 4 つを選ぶ場合の数は，${}_8\mathrm{C}_4 = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$ である。また，正方形になる場合の数は，2 である。

(2) 鋭角になる場合は，一つの頂点に対して一つの場合しかない（一つの頂点の対角の頂点の両側を選ぶ場合のみ)。したがって，場合の数は 8 である。

問 5 n は，$n = 5m + p$（m は整数，$p = 0, 1, 2, 3, 4$）と表すことができる。これを $n^2 + n + 2$ に代入すると，

$n^2 + n + 2 = 5(5m^2 + 2mp + m) + p^2 + p + 2$

となるので，$p^2 + p + 2$ が 5 の倍数であるかどうかを調べればよい。

(a) $p = 0$ の場合，

$p^2 + p + 2 = 2$

であり，5 の倍数ではない。

(b) $p = 1$ の場合，

$p^2 + p + 2 = 4$

であり，5 の倍数ではない。

(c) $p = 2$ の場合，

$p^2 + p + 2 = 8$

であり，5 の倍数ではない。

(d) $p = 3$ の場合，

$p^2 + p + 2 = 14$

であり，5 の倍数ではない。

(e) $p = 4$ の場合，

$p^2 + p + 2 = 22$

であり，5 の倍数ではない。

したがって，すべて 5 の倍数ではないので題意は示された。

問 6 (1) 4 つの点は，$x=\pi/2$ と $x=5\pi/2$ を境に対称に存在する 2 点ずつであり，正弦関数の周期性を考慮すると，残りの 3 点の x 座標は，

$\pi-\alpha$，$\alpha+2\pi, 3\pi-\alpha$

である。

(2) 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(\sin x-k)dx+\int_{\pi-\alpha}^{\alpha+2\pi}(k-\sin x)dx+\int_{\alpha+2\pi}^{3\pi-\alpha}(\sin x-k)dx \\ &= \{-\cos(\pi-\alpha)+\cos\alpha\}-k(\pi-\alpha-\alpha) \\ &\quad +k(\alpha+2\pi-\pi+\alpha)+\{\cos(\alpha+2\pi)-\cos(\pi-\alpha)\} \\ &\quad +\{-\cos(3\pi-\alpha)+\cos(\alpha+2\pi)\}-k(3\pi-\alpha-\alpha-2\pi) \\ &= 6\cos\alpha+(6\alpha-\pi)k \end{aligned}$$

である。$k=\sin\alpha$ であるから,

$S=6\cos\alpha+(6\alpha-\pi)\sin\alpha$

である。

(3) $\dfrac{dS}{d\alpha}=-6\sin\alpha+6\sin\alpha+(6\alpha-\pi)\cos\alpha=(6\alpha-\pi)\cos\alpha$

であり，$0<\alpha<\pi/2$ であるので，増減表を書くと $\dfrac{dS}{d\alpha}=0$ となる $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値

$S=3\sqrt{3}$

をもつことがわかる。また，このときの k は

$k=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

である。