平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

数学

解答例

解答例：数学

出題意図

　本課題は大学で履修する数学で無理が生じないかを判断するために実施している。したがって，応用力を問う難問ではなく，基礎的な学力が備わっているのかを問う問題を出題している。また，大学での数学の履修を意図しているので出題範囲も数学 III を含むものとなっている。今回の出題では，具体的に
問 1 整数の性質を理解しているか
問 2 積分が行なえるか
問 3 複素数の取り扱いができるか
問 4 図形と三角関数の取り扱いができるか
問 5 対数の性質を理解しているか
問 6 微分や極限値を理解しているか
を問うことで，当該事項の判断を総合的に行なうものとする。

問 1 $xy + 2x - y - 3 = (x-1)(y+2) - 1 = 0$
であるから，
$(x-1)(y+2) = 1$
を満たす整数解を求めればよい。
すなわち，$x - 1 = 1$，$y + 2 = 1$ もしくは $x - 1 = -1$，$y + 2 = -1$ である。
したがって，求める整数解は，
$(x, y) = (2, -1)$，$(0, -3)$
である。

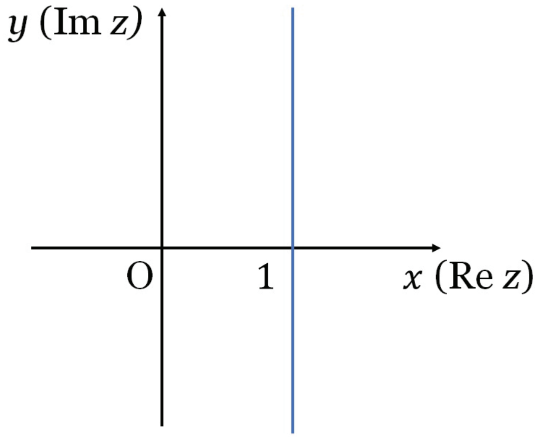
問 2 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx = \log|x+1| + C$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \{(1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x\}dx = \int (\cos^4 x - \cos^2 x)d(\cos x)$
$\displaystyle = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

(3) $\displaystyle\int (x\log x)dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\ dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)\log x - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)(\log x)'dx$
$\displaystyle = \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

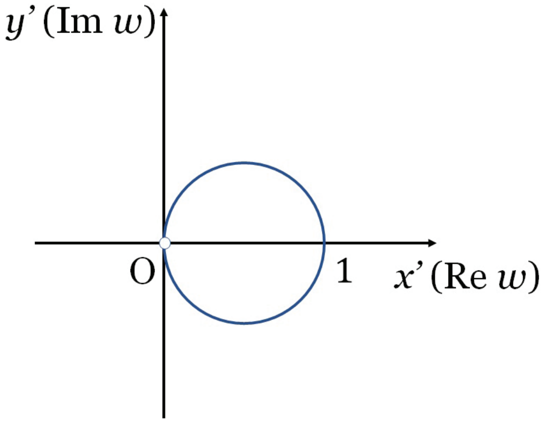
問 3 (1) $z = x + iy$ とおいて，$z + \bar{z} = 2$ を変形すると，$x = 1$。したがって，1 を通り，虚軸に平行な直線になる。

(1)



(2) $z = 1/w$ として $z + \bar{z} = 2$ に代入すると、$1/w + 1/\bar{w} = 2$。両辺に $w\bar{w}$ をかけて整理すると $w + \bar{w} = 2|w|^2$ である。$w = x' + iy'$ とおいて整理すると $(x' - 1/2)^2 + y'^2 = (1/2)^2$。$w = 0$ は含まれないことに注意すると，図のようになる。

(2)



問 4 (1) 円の中心を O とすると，$\mathrm{AO} = \mathrm{BO} = \mathrm{AB} = 1$ なので，$\triangle \mathrm{ABO}$ は正三角形であり，$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{OBA} = \angle \mathrm{AOB} = 60^\circ$ である。円に内接する三角形の性質から $\angle \mathrm{ACB} = 30^\circ$ である。

(2) 正弦定理から $\mathrm{AC} = 2\sin\theta$, $\mathrm{BC} = 2\sin(150^\circ - \theta) = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$

(3) (2) から $\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = 2\sin\theta + 2\sin(150^\circ - \theta)$ である。ここで，三角関数の和・積の公式 $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ を用いると，
$\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = 4\sin 75^\circ \cos(\theta - 75^\circ)$ である。$\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるためには $60^\circ < \theta < 90^\circ$ でなければならないことに注意すると，この θ の範囲で，$\cos(\theta - 75^\circ)$ は $\theta = 75^\circ$ のとき最大値 1 をとる。したがって，$\mathrm{AC} + \mathrm{BC}$ の最大値は $4\sin 75^\circ = 4\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ である。

問 5 (1) 2^{100} の常用対数をとると，$\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 30.1$。したがって，31 桁。

(2) 底を 2 として変換すると，$\log_2 x - 3/\log_2 x \geqq 2$。$\log_2 x = X$ とおく。$X \neq 0$ であることに注意する。

$X > 0$ $(x > 1)$ の時，両辺に X をかけて整理すると，

$X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3) \geqq 0$。

$X > 0$ であったことから，$X \geqq 3$。したがって，$x \geqq 8$

$X < 0$ $(x < 1)$ の時、両辺に X をかけて整理すると，$X^2 - 2X - 3 \leqq 0$。

$X < 0$ であったことから、$-1 \leqq X < 0$。したがって，$1/2 \leqq x < 1$

(i)(ii) をまとめると解は，$1/2 \leqq x < 1$ または $x \geqq 8$。

問 6 (1) $x < 0$ のとき，$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$ なので，

$\lim_{x \to -0} f'(x) = 1$

である。

$x > 0$ のとき，$f'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$ なので，

$\lim_{x \to +0} f'(x) = -1$

である。

(2) (1) より $x < 0$ のとき，$f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$

$x > 0$ のとき，$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

である。$f'(x)$ が 0 となり，かつその前後で x の増加とともに $f'(x)$ の符号が負から正に変わるのは，

$x = \pm\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$

のときである。これを $f(x)$ に代入すると，

$f(x) = e^{-\frac{3\pi}{4} - 2n\pi} \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4} - 2n\pi}}{2}$ である。

この式より，$f(x)$ は $n = 0$ すなわち $x = \pm\dfrac{3\pi}{4}$ のとき最小値をとり，

その値は $f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}}{2}$ である。