令和元年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　課題 I-A, I-B

解答例

解答例 [I-A]

問 1 運動量保存の法則より, 物体 P および Q の速度をそれぞれ V, v とし, かつ右向きを正として,

$$0 = MV + mv$$

よって,

$$V = -\frac{m}{M}v \tag{1}$$

力学的エネルギー保存則から, ばねの弾性エネルギーが P と Q の運動エネルギーに変換されるから,

$$\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

(1) を代入して,

$$v = l\sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}} \tag{3}$$

問 2 小球 Q が速度 v で台 R が静止した状態から, 小球 Q が台 R をすべり上がる際の重心の速度の水平成分 v_1 を求めると,

$$v_1 = \frac{m}{M+m}v$$

問 3 物体 Q が右に動いて曲面を上がると台 R は右に動く。台 R をすべり上がる初めの速度を v とすると, 最大の高さ h の時, 台 R 上で小球 Q は止まり, 一体として速度 V' で移動する。そのとき, 運動量保存則から,

$$mv = (M+m)V'$$

$$V' = \frac{m}{M+m}v \tag{4}$$

力学的エネルギー保存則から, Q と R の運動エネルギーが位置エネルギーに変換されるから,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}(M+m)V'^2$$

(4) を代入して,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v^2$$

よって,

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{M}{M+m}\right)$$

問 4 解答例 1

小球 Q が速度 v で静止した台 R をすべり上がり, 最大の高さ h を経て再び台 R から離れる。したがって運動量保存則から, 小球 Q が台 R をすべり下りたときの, 小球 Q と台 R の速度をそれぞれ v_2 および V_2 として,

$$mv = mv_2 + MV_2$$

$$V_2 = \frac{m}{M}(v - v_2) \tag{5}$$

力学的エネルギー保存則から,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

(5) を代入して,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v - v_2)^2$$

$$(M+m)v_2^2 - 2mvv_2 - (M-m)v^2 = 0$$

$$v_2 = \frac{mv \pm \sqrt{m^2v^2 + (M+m)(M-m)v^2}}{M+m}$$

$$= \frac{mv \pm Mv}{M+m}$$

小球 Q 動きは左方向であることから,

$$v_2 = \frac{mv - Mv}{M+m} = -\frac{M-m}{M+m}v$$

(3) を代入して,

$$v_2 = -l\left(\frac{M-m}{M+m}\right)\sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}}$$

解答例 2

重心系では滑り上がり始める直前と滑り降りた直後で, 速さは同じで向きが反対になる。衝突前の重心系での小球 Q の台 R をすべり上がる直前の速度を v', すべり下りた直後の速度を v'' とすると,

$$v' = v - v_1 = \frac{M}{M+m}v$$

$$v'' = -v'$$

となる。重心の速度を加えると, 小球 Q の速度 v_2 は,

$$\begin{aligned} v_2 &= v'' + v_1 \\ &= -v' + v_1 \\ &= \frac{-M+m}{M+m}v = -\frac{M-m}{M+m}v \end{aligned}$$

よって, (3) を代入して,

$$v_2 = -l\left(\frac{M-m}{M+m}\right)\sqrt{\frac{kM}{m(M+m)}}$$

解答例 [I-B]

抵抗Rの抵抗の値を $R[\Omega]$ とし，抵抗 R_1，R_2 および R_3 の抵抗の値をそれぞれ $R_1[\Omega]$，$R_2[\Omega]$ および $R_3[\Omega]$ とする。

問1 ダイオードDに電流が流れないとすると，$V_A = 42 \times \frac{R_1}{R+R_1} = 42 \times \frac{3}{4+3} = 18\,\mathrm{V}$ および $V_B = 42 \times \frac{R_3}{R_2+R_3} = 42 \times \frac{6}{6+4} = 25.2\,\mathrm{V}$ より，$V_A < V_B$ なので，たしかにDに電流は流れない。

したがって，Rおよび R_1 を流れる電流の値は等しく，その値を I [A] とすると，$I = \frac{42}{R+R_1} = \frac{42}{4+3} = 6\mathrm{A}$ である。

問2 $V_A < V_B$ のときDに電流は流れないので，$V_A = 42 \times \frac{R_1}{R+R_1}[\mathrm{V}]$ および $V_B = 42 \times \frac{R_3}{R_2+R_3}[\mathrm{V}]$ より，$\frac{R_1}{R+R_1} < \frac{R_3}{R_2+R_3}$ のときDに電流は流れない。この不等式に $R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 4\Omega$ および $R_3 = 6\Omega$ を代入すると，$\frac{3}{R+3} < \frac{6}{4+6}$ となり，これを解くと $R > 2\Omega$ が得られる。

したがって，求める抵抗の値の範囲は $R > 2\Omega$ である。

問3 抵抗 R_2，Rおよびダイオード D を流れる電流をそれぞれ，$I_2[\mathrm{A}]$，$I_R[\mathrm{A}]$ および $I_D[\mathrm{A}]$ とおく。

このとき，

$R_2 I_2 = R I_R$　（抵抗Rの電圧降下と抵抗 R_2 の電圧降下が等しい）

$R_3(I_2 + I_D) = R_1(I_R - I_D)$　（抵抗 R_3 の電圧降下と抵抗 R_1 の電圧降下が等しい）

$R I_R + R_1(I_R - I_D) = 42\,\mathrm{V}$　（回路の上側の電圧降下は電源電圧に等しい）

が成立する。この連立方程式に $R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 4\Omega$，$R_3 = 6\Omega$ および $R = 1\Omega$ を代入して解くと，$I_2 = 3$ A，$I_R = 12$ A および $I_D = 2$ A が得られる。

したがって，$I_D = 2$ A である。