平成 28 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

方式 III　課題 I-A，I-B，I-C

解答例

[I-A]

問 1

$f'(x) = x - \frac{6}{x-1} = 0$ より

$x(x-1) - 6 = 0$

$x^2 - 1x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$\therefore x = 3$または$x = -2$

ここで$\log(x-1)$の$(x-1)$は常に正である必要があるので$x = -2$は不適。したがって，$x = 3$の前後をみると負から正へと変化していることから，$f(x)$ の最小値は$f(3) = \frac{9}{2} - 6\log 2$となる。

問 2

(1) 玉の数は 3+4+5=12 個

ここで 12 個から 3 個の玉を取り出す方法は

$${}_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 11 \cdot 10 \text{ 通り}$$

赤玉を 1 つ取り出す方法は ${}_3\mathrm{C}_1$＝3 通りであり，白玉を 1 つ取り出す方法は ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$通りであり，青玉を 1 つ取り出す方法は ${}_5\mathrm{C}_1 = 5$通りである。したがって異なる色の玉を 1 つずつ取り出す確率は,

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{60}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3}{11}$$

(2) 取り出された 3 個の玉の中に含まれる赤玉の個数を X (=0,1,2,3)とし，X=k となる確立を $P(X=k)$とすると，赤玉が 3 個あり，それ以外が 9 個あることから,

$$P(X=1) = \frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_9\mathrm{C}_2}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{27}{55}$$

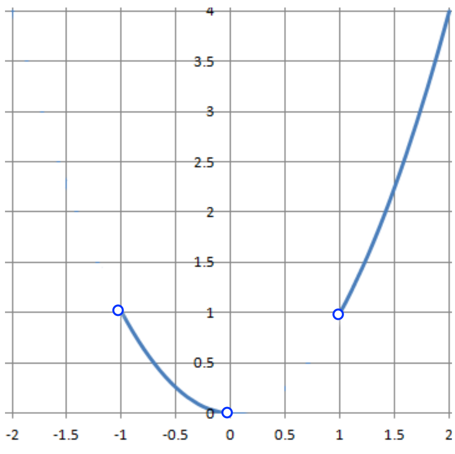
$$P(X=2) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_9\mathrm{C}_1}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9}{2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 2} = \frac{27}{220}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3\mathrm{C}_3 \cdot {}_9\mathrm{C}_0}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{1}{220}$$

したがって，3 この中に含まれる赤玉の期待値は,

$$1 \cdot \frac{27}{55} + 2 \cdot \frac{27}{220} + 3 \cdot \frac{1}{220} = \frac{108 + 54 + 3}{220} = \frac{165}{220} = \frac{3}{4} \text{個}$$

問 3

(1)	$x^2+y^2-2k(x+ky)+k^4-k^3+k^2+k=0$ は， $(x-k)^2+(y-k^2)^2=k^3-k$ の式に変形できるので，この式が円の式となるためには，$k^3-k>0$ が満たされればいいことがわかる。 $k^3-k=0$ と置き，この３次式が満たされる k が，$k=0$，$k=\pm1$ であることより，$-1<k<0$，$1<k$ のときに上式が円を表すことが分かる。
(2)	(1)より，この円の中心座標(x, y)は，(k, k^2)であることがわかるので，その軌跡は $y=x^2$ で表すことができる。下図に，その軌跡が円を示す範囲を図示する。 

問 4　$dx/dt = -ae^{-at}\sin at + ae^{-at}\cos at$　$dy/dt = -ae^{-at}\cos at - ae^{-at}\sin at$

$\boldsymbol{v}=(-ae^{-at}\sin at + ae^{-at}\cos at, -ae^{-at}\cos at - ae^{-at}\sin at)$，$\overrightarrow{OA}=\left(e^{-at}\sin at, e^{-at}\cos at\right)$

$v = 2^{1/2}ae^{-at}$　　$OA= e^{-at}$

$\cos\theta = (-e^{-2at}\sin^2 at + e^{-2at}\sin at\cos at - e^{-2at}\cos^2 at - e^{-2at}\sin at\cos at)/ 2^{1/2}e^{-at}e^{-at}$

$= - 1/2^{1/2}$

$\underline{3\pi/4}$

問 5　$I=-e^{-x}\cos 3x-3\int e^{-x}\sin 3x dx=-e^{-x}\cos 3x-3J$

$J=-e^{-x}\sin 3x+3\int e^{-x}\cos 3x dx=-e^{-x}\sin 3x+3I$

$J=-e^{-x}\sin 3x+3(-e^{-x}\cos 3x-3J)=-e^{-x}\sin 3x-3e^{-x}\cos 3x-9J$

$J=-e^{-x}(\sin 3x+3\cos 3x)/10+\mathrm{const}1$

$I=-e^{-x}\cos 3x-3J=-e^{-x}\cos 3x-3(-e^{-x}\sin 3x+3I)=e^{-x}(-\cos 3x+3\sin 3x)-9I$

$I=e^{-x}(-\cos 3x+3\sin 3x)/10+\mathrm{const}2$

[I-B]

問 1 運動方程式

A: $\underline{m_1 a = - m_1 g + T_1}$

B: $\underline{m_2 b = m_2 g - T_1}$

問 2

P: $0 = T_2 - 2T_1$

$m_1 a + m_1 \mathrm{g} = T_1$　　$m_1 a + m_1 g = m_2 g - m_2 b$　　$b = -a$　　$(m_1 + m_2)\, a = (m_2 - m_1)\, g$

$\underline{a = (m_2 - m_1)\, g / (m_1 + m_2)}$

問３

A: $\underline{m_1 a = - m_1 g + T_3}$

B: $\underline{m_2 b = m_2 g - T_3}$

C: $\underline{m_3 c = m_3 g - T_4}$

問４

P は質量をもたないので　$0 = T_4 - 2T_3$

P から見たＡの加速度の大きさは $a - c =$　P から見たＢの加速度の大きさ $b + c$　より

$a - b = 2\, c$

以上，運動法的式と合わせて 5 つの方程式から

$m_3 g - m_3 c = 2(m_1 a + m_1 g)$　　$c = g - 2(a + g)\, m_1 / m_3$

$m_1 a + m_1 g = m_2 g - m_2 b$　　$b = g - (g + a)\, m_1 / m_2$

$a - g + (g + a)\, m_1 / m_2 = 2\, [g - 2(a + g)\, m_1 / m_3]$　　$a(1 + m_1 / m_2 + 4\, m_1 / m_3) = 2\mathrm{g} - 4\, \mathrm{g}\, m_1 / m_3 + \mathrm{g} - g\, m_1 / m_2$

$\underline{a = (3 - 4\, m_1 / m_3 - m_1 / m_2)\, \mathrm{g} / (1 + m_1 / m_2 + 4\, m_1 / m_3)}$

問 5

$g - 2(a + g)\, m_1 / m_3 = g - (g + a)\, m_1 / m_2$

$2 / m_3 = 1 / m_2$

$\underline{m_3 = 2\, m_2}$

[I-C]

問 1

(1) $I = V/R = 10/(1000+1000) = 0.005$ A

(2) 4.0×10^{-5} C

(3) 3.2×10^{-5} C

(4) ゼロ

問 2　S1 を開く前にコンデンサーに蓄えられていたエネルギーは

$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(3.2\times10^{-5})^2}{2\times4.0\times10^{-6}}$ J で与えられるため，これが抵抗で消費されるとすると，分圧の法則

から 4 : 1 に振り分けられる。従って 4 kΩの抵抗で消費される電力量は

$U_{4k\Omega} = \frac{Q^2}{2C}\cdot\frac{4}{4+1} = \frac{(3.2\times10^{-5})^2}{2\times4.0\times10^{-6}}\cdot\frac{4}{5} = 1.024\times10^{-4}$ J となる。