

平成29年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I, II

(9:00–15:00)

注意事項

1. 問題すべてに解答してください。
2. 携帯電話, スマートフォンの電源を必ず切ってください。

[I]

細い直線状の溝がある半径 R の水平な円板が、水平面内を回転できるように設置されている。円板上の溝の中には質量 m の小球があり、溝の両端からのみ外に飛び出すことができる。このような小球の運動を考えよう。ただし、小球は転がることなく溝の中をすべるとする。

問1 図1のような中心 O を通る直線状の細い溝がある半径 R の円板が水平に置かれている。まずは、円板が回転していない状況を考える。点 O にある小球に大きさ v_0 の初速度を与えて外向きに打ち出す。小球が溝をすべる際の溝の底面との動摩擦係数を μ' とし、溝の底面との静止摩擦係数 μ は動摩擦係数よりも大きいとする。小球と溝の壁面との摩擦や空気による抵抗は無視できるとし、重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えなさい。

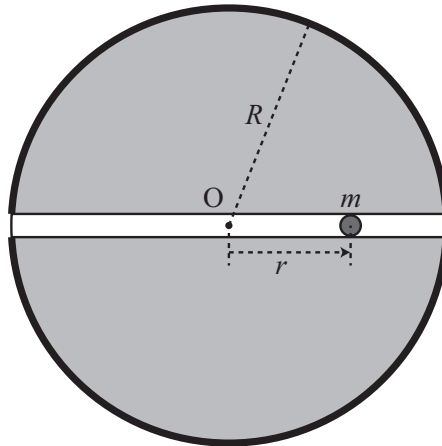


図1

- (a) 小球が点 O から半径 r の位置まで静止することなく動いた。この位置において、小球にはたらく力の溝に平行な成分 $F_1(r)$ を求めなさい。ただし、中心から見て外向きを正とする。
- (b) 小球が点 O から半径 r の位置まで静止することなく動いたとき、その間に問1(a) で求めた力が小球にした仕事 W_1 は、 $W_1 = \int_0^r F_1(r') dr'$ と計算できる。 W_1 を求めなさい。
- (c) 小球が円板の端まで到達するための v_0 の条件を求めなさい。
- (d) 問1(c) の条件を満たすとき、小球が円板から飛び出すときの小球の速さ v_1 を求めなさい。

問2 次に、図2のような回転中心 O を通る直線状の細い溝がある円板が一定の角速度 ω (ただし $\omega > 0$) で反時計回りに回転している状況を考える。点 O にある質量 m の小球に、円板と一緒に回転している観測者から見て大きさ v_0 の初速度を与えて外向きに打ち出すときの小球の運動を考えよう。以降は溝の底面もなめらかであり、小球と溝の壁面や底面との摩擦、空気による抵抗はないとする。以下の問2(a) から問2(c) では円板と一緒に回転している観測者の視点から考えなさい。ただし、円板と一緒に回転している観測者からみると、溝の中を運動している小球に、その位置に静止している場合と同じ遠心力がはたらくことが知られている。

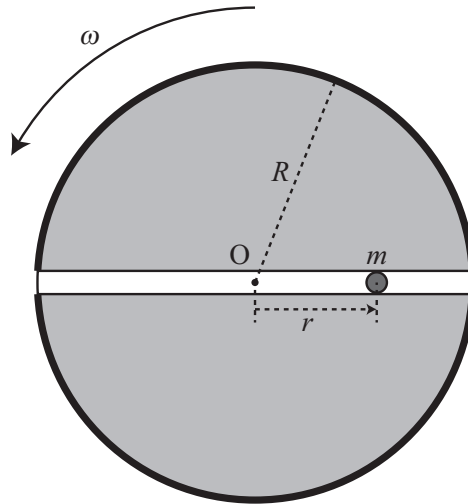


図2

- (a) 小球が点 O から半径 r の位置にあるとき、小球にはたらく力の溝に平行な成分 $F_2(r)$ を求めなさい。ただし、中心から見て外向きを正とする。
- (b) 小球が点 O から半径 r の位置まで動いたとき、その間に問2(a) で求めた力が小球に対してした仕事 W_2 を求めなさい。仕事は問1(b) で求めたのと同様に計算できる。
- (c) 小球が原点から半径 r の位置にあるときの小球の速さ v_2 を求めなさい。
- (d) 小球が円板を飛び出した瞬間の、円板の外で静止している観測者から見た小球の速度の溝に平行な成分と溝に垂直な成分を求めなさい。ただし、溝に平行な成分は点 O から見て外向きを正とし、溝に垂直な成分は回転の正の向きに動いている場合を正とする。

問3 問2では、回転中心 O を通る溝のみを考えたが、溝の位置を点 O からずらすことで円板から飛び出す速さをもっと速くできないだろうか。そこで図3のように、点 O からずれた位置に直線状の細い溝がある半径 R の円板が水平面内を一定の角速度 ω (ただし $\omega > 0$) で反時計回りに回転している状況を考える。点 O から溝に下した垂線の足を A とし、 OA 間の距離を ℓ とする。点 A からみて回転の正の向きにある溝の端点を C 、回転の負の向きにある端点を B とする。点 A にある質量 m の小球に円板と一緒に回転している観測者から見て大きさ v_0 の初速度を与えて点 B または点 C の向きに打ち出すときの小球の運動を考えよう。問2と同様に溝の底面もなめらかであり、小球と溝の壁面や底面との摩擦、空気による抵抗はないとする。

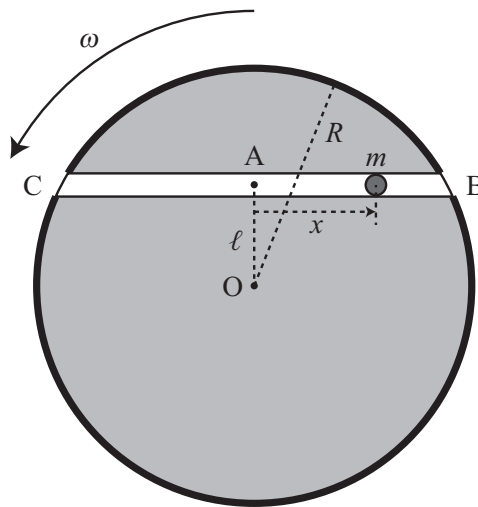


図3

まずは円板と一緒に回転している観測者の視点から考える。

- (a) 小球が点 A から点 B に向かって動いた。小球が点 A から距離 x の位置にあるとき、小球にはたらく力の溝に平行な成分 $F_3(x)$ を求めなさい。ただし点 A から点 B の向きを正とする。
- (b) 小球が点 A から点 B に向かって距離 x の位置まで動いたとき、小球の速さ v_3 を求めなさい。

次に、円板の外で静止している観測者の視点で考える。これ以降、初速度 v_0 は十分に小さいとして $v_0 = 0$ と近似できるとする。

- (c) 小球が点 B から円板外に飛び出したとき、円板の外で静止している観測者からみた小球の速さ $u_B(\ell)$ を求めなさい。
- (d) 小球が点 C から円板外に飛び出したとき、円板の外で静止している観測者からみた小球の速さ $u_C(\ell)$ を求めなさい。

- (e) $u_B(\ell)$, $u_C(\ell)$ を ℓ の関数としてみたとき, $0 \leq \ell \leq R$ の範囲で, グラフのおおよその形を描きなさい。
- (f) 小球が点 B または点 C から円板を飛び出すとき, 円板の外で静止している観測者から見たときの小球の速さの最大値と最小値を求めなさい。ただし, ℓ は $0 \leq \ell \leq R$ を満たすとする。

[II]

以下の問いに答えなさい。必要なら三角関数に関する以下の公式を用いてよい。

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} \{ \cos(x+y) - \cos(x-y) \}$$

A.

波とは、何らかの物理量が空間的・時間的に変化しながら伝播する現象のことである。 x 方向の正の向きに伝播する単一周波数の平面波は

$$E(x, t) = E_0 \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \quad (1)$$

のように正弦関数で記述される。ここで、 x は位置、 t は時間を表す。 $E(x, t)$ は変化する物理量、 E_0 は波の振幅、 c は波の速さ、 ω は角周波数である。

問1 波長 λ 、周期 T を、角周波数 ω および波の速さ c を用いて表しなさい。

光は波の一種であり、振動する電磁場がその正体である。光の周波数は極めて高いので、光の電場や磁場の变化を直接観測することはできない。光検出器で測定できるのは光の強度である。角周波数 ω の光の強度 $I(x, t)$ は、光の電場の大きさ $E(x, t)$ の二乗をその一周期 (T) で時間平均した量を使って、

$$I(x, t) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \langle E(x, t)^2 \rangle_T \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 ϵ_0 は誘電率であり、 c は光の速さに対応する。また、 $\langle \rangle_T$ は“光の電場の一周期で時間平均を取る”，という記号である。すなわち、 $\langle \rangle_T$ は、 $A(t)$ を時間 t の関数として、

$$\langle A(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} A(t') dt' \quad (3)$$

のように定義される。以下の設問では、 $\langle \rangle_T$ を求める際には、角周波数 ω の波の周期 T を用いなさい。

問2 (3) 式の定義に従って $\langle \cos \omega' t \rangle_T$ を求め、 ω, ω', t を用いて表しなさい。ただし、 ω と ω' は等しいとは限らないことに注意しなさい。

問3 (1) 式の $E(x, t)$ を光の電場の大きさとする。(1) 式を (2) 式に代入して位置 x における光の強度 $I(x, t)$ を求めなさい。ただし、 E_0, ω はいずれも定数とする。また、(3) 式の時間積分を実行する際には、位置 x は定数とみなしてよい。

次に、角周波数が ω と $\omega + \Delta\omega$ でわずかに異なる二つの単色光を考える。それぞれの光の電場は正弦関数で表され、光の電場の向き（偏光方向）が同じであるとする。これらの単色光を重ね合わせて合成波を作る。このとき、合成波の光の電場はそれぞれの光の電場の和で表される。このとき合成波には「うなり」が生じ、光の強度の増減が繰り返されることになる。

問4

(a) $\langle \{A \sin \omega t + B \sin (\omega + \Delta\omega) t\}^2 \rangle_T$ を計算しなさい。

(b) $\Delta\omega$ が十分小さいとき ($|\Delta\omega| \ll \omega$) には、

$$\langle \{A \sin \omega t + B \sin (\omega + \Delta\omega) t\}^2 \rangle_T \cong \frac{A^2 + B^2 + 2AB \cos \Delta\omega t}{2}$$

となることを示しなさい。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を証明せずに用いても良い。

問5 x 方向の正の向きに進む光の電場が

$$E(x, t) = E_0 \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} + \alpha E_0 \sin \left\{ (\omega + \Delta\omega) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}$$

と書かれる場合を考える。角周波数の違い $\Delta\omega$ は光の角周波数 ω と比べて十分小さいものとする。また、 α は定数とする。このとき、位置 x 、時間 t での光強度は $I = I_0 \{1 + V \cos \phi(x, t)\}$ と表記することができ、干渉によって光の強度が時間とともに増減する。平均強度 I_0 、コントラスト V 、位相 $\phi(x, t)$ を求めなさい。

B.

図1のように，光源，半透鏡，可動鏡，固定鏡，光検出器から構成される干渉計を考える。図1の左にある光源から角周波数 ω の単色光を入射する。この光は平面波として取り扱うことができる。光は半透鏡で1：1の強度比に分割され，一方は反射されて図の上方（経路1）へ，もう一方は透過して図の右側（経路2）へ進む。経路1には移動可能な鏡（可動鏡）が，経路2には位置が固定された鏡（固定鏡）があり，それぞれの鏡で反射された光は半透鏡上の同じ位置で重ね合わされる。経路1を通った光の半分が半透鏡を透過し，経路2を通った光の半分が半透鏡で反射されて，光検出器上の同じ位置に照射される。光源，固定鏡，光検出器と半透鏡との距離は等しく， L であった。可動鏡と半透鏡の距離を L_1 とする。また，空間を満たしている媒質の屈折率は1，光の速さは c とする。

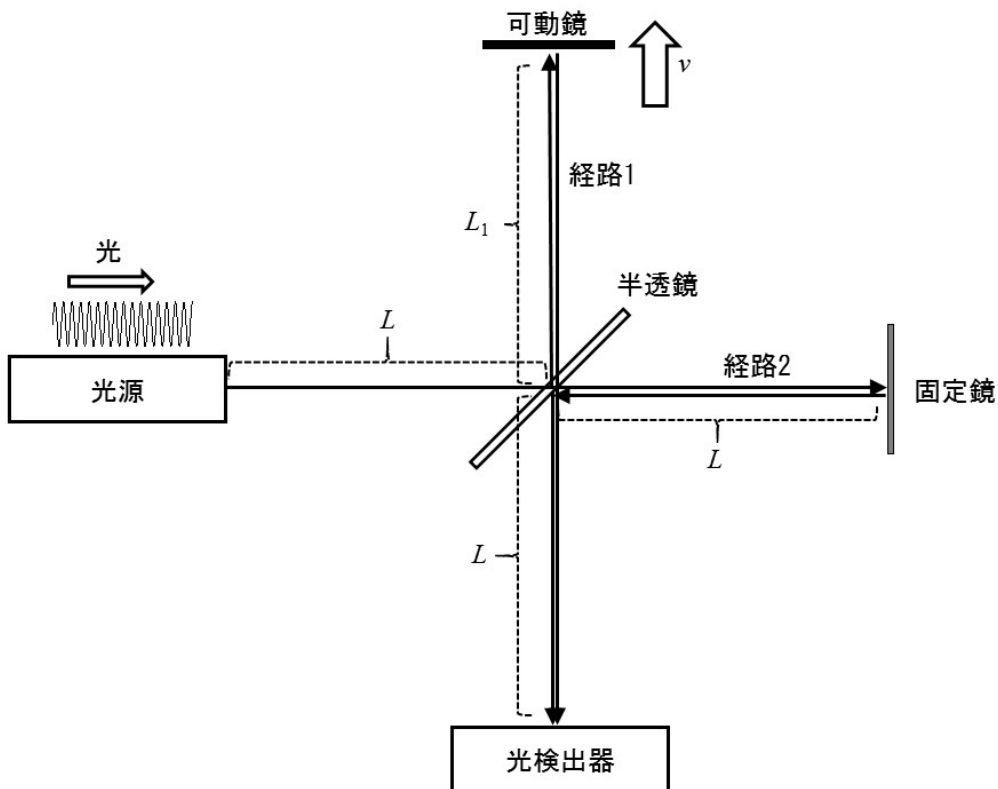


図 1:

問 1 はじめ可動鏡は半透鏡から距離 L_0 の位置に静止していた ($L_1 = L_0$)。このとき，光検出器上で観測される光の強度は，可動鏡側と固定鏡側を進んだ光の光路長の差によって異なる。光検出器上で観測される光の強度が最大になるときの L と L_0 の関係を示しなさい。

問2 可動鏡が一定の速さ v で半透鏡から遠ざかると、光検出器上では経路1と経路2を通った光が重なり合っただけで干渉し、光の強度が時間とともに周期的に変化する。時刻 t での可動鏡の位置が $L_1 = L_0 + vt (v > 0)$ と表されるとき、光強度の増減の周期を ω, c, v を用いて表しなさい。ただし、反射された光はドップラー効果により波長が変化するはずであるが、ここでは簡単のためドップラー効果を無視する。

問3 実際には、経路1の可動鏡を速さ v で移動させると、反射波の角周波数はドップラー効果により変化する。以下のような手順で反射波の角周波数を求めよう。ただし、 $c \gg v$ のときには、光のドップラー効果は音波の場合と同じように取り扱うことができ、静止している場所から測った光の速さは角周波数によらず常に一定(c)であると考えてよい。

(a) 時刻 t_1 に半透鏡で反射された光が可動鏡で反射され、再び半透鏡に到達する時刻 t_2 を t_1, L_0, v, c を用いて表しなさい。

(b) 時刻 $t_1 + \Delta t_1$ に半透鏡で反射された光が可動鏡で反射され、再び半透鏡に到達する時刻を $t_2 + \Delta t_2$ とする。 Δt_2 を $\Delta t_1, v, c$ を用いて表しなさい。

(c) 時間 Δt_1 および Δt_2 のあいだに光の電場が振動する回数は等しくなくてはならないことに注意して、反射波の角周波数を ω, v, c を用いて表しなさい。

(d) ドップラー効果を考慮すると、光検出器上では角周波数の異なる二つの光が重ね合わされていることになる。このため二つの光はうなりを起こす。光の強度の増減の周期を求めなさい。

問4 可動鏡の反射率は1(完全反射)だが、固定鏡の反射率は β だった。(すなわち、固定鏡に入射した光の強度が I_1 だとすると、反射光の強度は βI_1 になる。) 光検出器で観測される干渉のコントラスト V (A. 問5 参照) を求めなさい。

解説

以上の原理を応用すると、生体のように不透明な物体の奥行方向の断層画像を得ることができる。これは光コヒーレンストモグラフィーと呼ばれ、医療分野で実用化されている。図1で固定鏡の代わりに奥行きのある半透明な物体を置いたとしよう。これは反射率の異なる固定鏡が奥行方向に連続して置かれているとみなすことができる。経路2を通り物体の内部から反射した光と経路1を通った光が光検出器上に同時に辿り着けば、干渉による明滅が観測される。光源としてある一定時間だけ光が出力されるようなパルス光を用いると、干渉のコントラストと可動鏡位置の関係から、物体の奥行方向の断層画像を得ることができる。

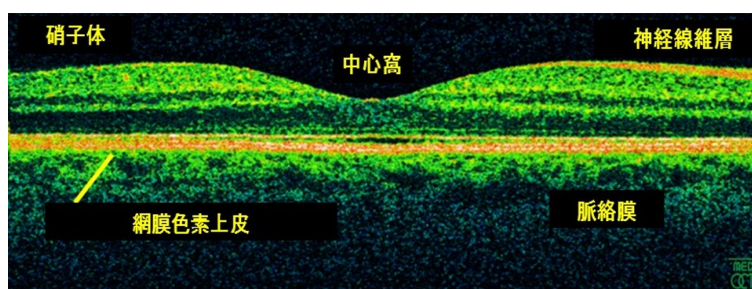


図 2: 網膜の光コヒーレンストモグラフィー断層画像

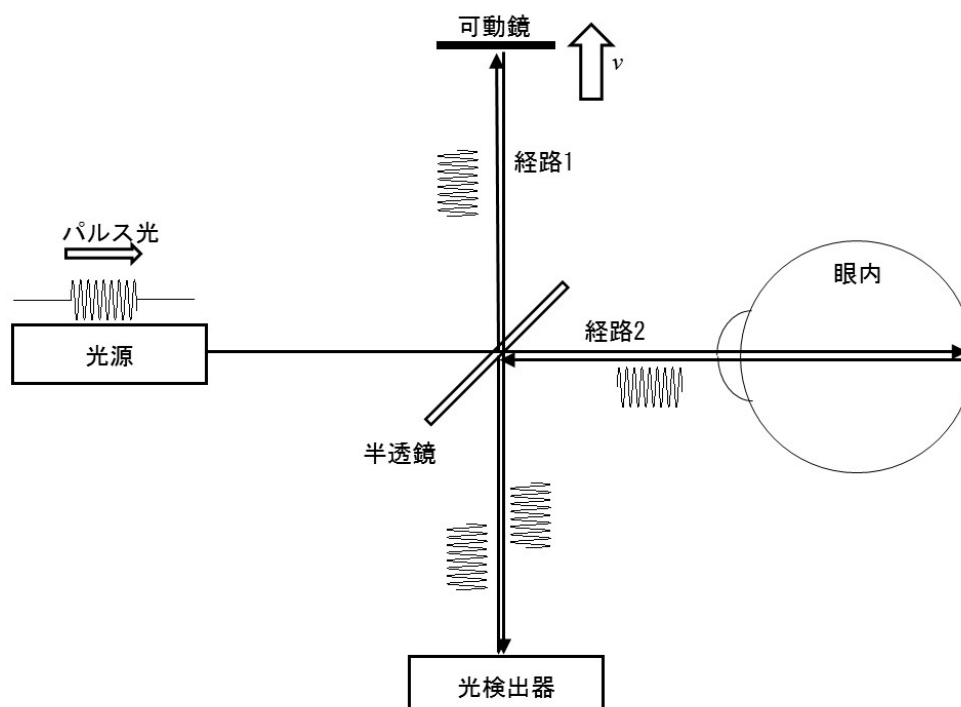


図 3: 光コヒーレンストモグラフィー装置の概要