平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　課題 I-A, I-B, I-C

解答例

[I-A] 解答例

(a) ばね定数 k_1, k_2 のばねの伸びをそれぞれ x_1，x_2 とすると

$$x_1 = \frac{mg}{k_1}, \qquad x_2 = \frac{mg}{k_2}$$

と表されるので全体の伸び x_a は

$$x_a = x_1 + x_2 = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) mg$$

となる。従って，x_a と合成ばね定数 K_a との関係式 $x_a = \dfrac{mg}{K_a}$ より

$$\frac{1}{K_a} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \therefore K_a = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

よって，固有振動数 f_a は

$$f_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_a}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m\,(k_1 + k_2)}}$$

となる。

(b) ばねの伸びを x_b とすると，力のつり合いは

$$mg = (k_1 + k_2)\, x_b$$

となる。従って，合成ばね定数 K_b は

$$K_b = k_1 + k_2$$

となり，固有振動数 f_b は

$$f_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_b}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}$$

となる。

(c) ばね定数 k_1 のばねの伸びとばね定数 k_2 のばねの縮みを x_c とすると，力のつり合いは

$$mg = (k_1 + k_2)\, x_c$$

となる。従って，合成ばね定数 K_c は，(b) と同様に

$$K_c = k_1 + k_2$$

となることから，固有振動数 f_c は

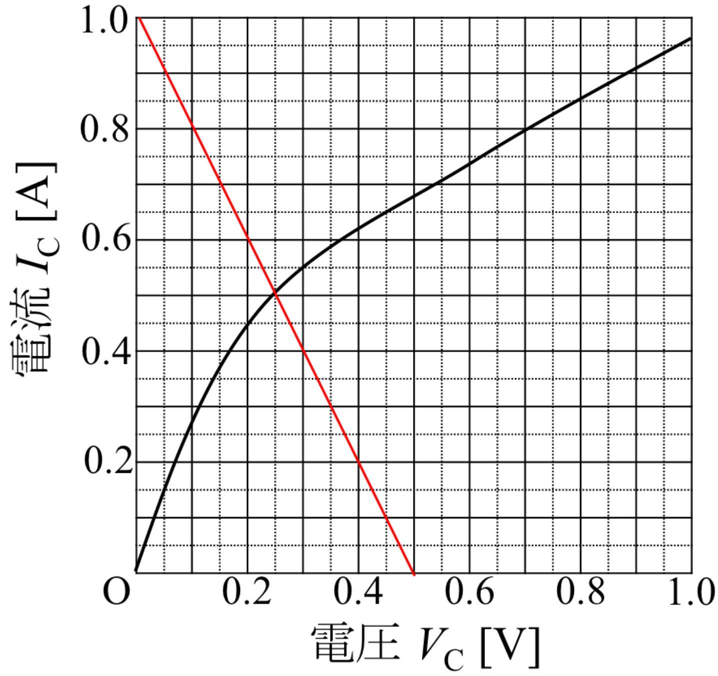
$$f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_c}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

となる。

[I-B] 解答例

問 1 B を流れる電流は $V_\mathrm{C}/R_\mathrm{B}$ であるから，A を流れる電流は $I_\mathrm{C}+V_\mathrm{C}/R_\mathrm{B}$ である。従って，A にかかる電圧は $R_\mathrm{A}(I_\mathrm{C}+V/R_\mathrm{B})$ で与えられ，これより $E=R_\mathrm{A}(I_\mathrm{C}+V_\mathrm{C}/R_\mathrm{B})+V_\mathrm{C}=(1+R_\mathrm{A}/R_\mathrm{B})V_\mathrm{C}+R_\mathrm{A}I_\mathrm{C}$ を得る。

問 2 与えられた数値を代入すると $I_\mathrm{C}=-2V_\mathrm{C}+1$ である。従って，以下の様に図 2(b) 上にこの直線を引き，交点を求めることにより，$I_\mathrm{C}=0.50$ [A] が得られる。



[I-C] 解答例

問 1 垂直入射の場合の弱めあう条件を用いる。ℓ 番目に極小となるのは

$$2d = \ell \frac{\lambda_\ell}{n} \qquad \cdots \quad ①$$

となる。

問 2 斜めに入射した場合，屈折角を r とすると，弱めあう条件は以下の様になる。

$$2d\cos r = m\frac{\lambda_\ell}{n} \qquad m \text{ は整数}$$

今，経路差は，$2d\cos r < 2d$ であるので，弱めあう条件は ℓ より 1 だけ少ない $m = \ell - 1$ $(\ell \geq 2)$ であることがわかる。よって，弱めあう条件は以下の様になる。

$$2d\cos r = (\ell - 1)\frac{\lambda_\ell}{n} \qquad \cdots \quad ②$$

① と ②を用いて，

$$\cos r = \frac{\ell - 1}{\ell} \qquad \cdots \quad ②,$$

となる。

問 3 スネルの法則 $\sin i = n \sin r$ を用いると薄膜の屈折率 n は以下の様になる。

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - (\ell - 1)^2}}\sin i$$

上記の計算では

$$\sin r = \sqrt{1 - \cos^2 r} = \frac{\sqrt{\ell^2 - (\ell - 1)^2}}{\ell}$$

を用いた。

平成 30 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　課題 I-D

解答例

[I-D] 解答例

問 1 $\displaystyle\int_0^{\log 2} \{1-(e^x-1)\}\,dx = [2x-e^x]_0^{\log 2} = 2\log 2 - 1$

別解: $\displaystyle\int_0^1 \log(y+1)dy = [(y+1)\{\log(y+1)-1\}]_0^1 = 2\log 2 - 1$

問 2 $-2\left(1+\sqrt{3}i\right) = 4(\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3)$ であるから，4 つの解 $z_1 \sim z_4$ は

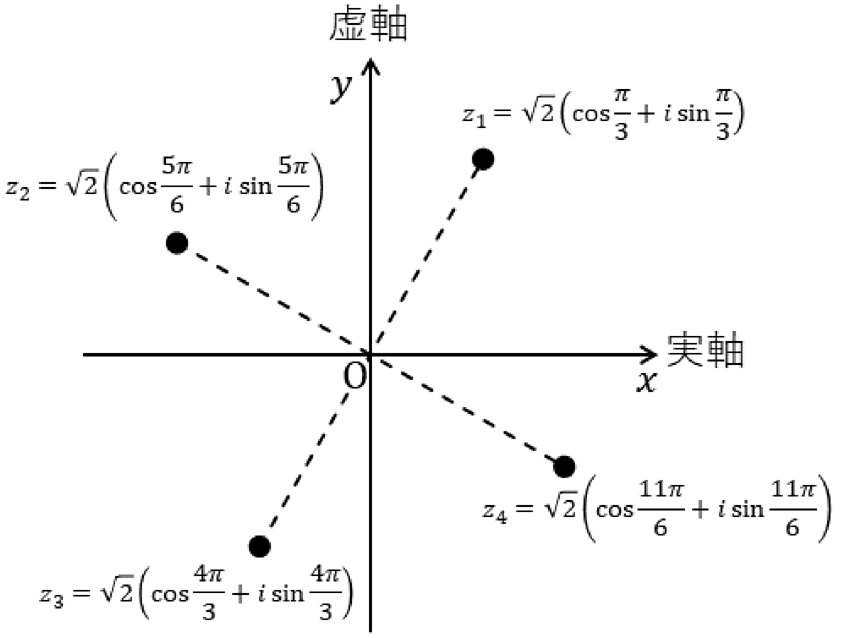
$z_1 = \sqrt{2}(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,$

$z_2 = \sqrt{2}(\cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$

$z_3 = \sqrt{2}(\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i,$

$z_4 = \sqrt{2}(\cos 11\pi/6 + i\sin 11\pi/6) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

である。複素数を $z = x + yi$ として複素数平面で表すと、この 4 つの解 $z_1 \sim z_4$ の複素数平面上での位置は以下の通り。



問 3 (1) 1 つが 5 以下となる確率は 5/6 であるから，出る目の最大値が 5 以下である確率は $(5/6)^3 = 125/216$。

(2) 1 つが 5 で，他の 2 つが共に 4 以下の確率は $1/6 \times 4/6 \times 4/6 \times {}_3C_1 = 48/216$。2 つが 5 で，1 つが 4 以下の確率は $1/6 \times 1/6 \times 4/6 \times {}_3C_2 = 12/216$。3 つとも 5 の確率は $(1/6)^3 = 1/216$。従って，出る目の最大値が 5 である確率は $48/216 + 12/126 + 1/216 = 61/216$ と求まる。

別解: 3 個とも 5 以下となる確率から，3 個とも 4 以下となる確率を引けば良いから，$(5/6)^3 - (4/6)^3 = 61/216$

問 4 **(1)** $b_{n+1} = 3b_n + 1$

(2) 漸化式は $b_{n+1} + 1/2 = 3(b_n + 1/2)$ と変形できるので，その解は $b_n + 1/2 = 3^{n-1}(b_1 + 1/2)$ の形式であることが分かる。これより，$a_n = 2/(3^n - 1)$ を得る。