平成 31 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

課題 I

解答例

出題意図

問 1-5: 力学の基本的な問題, 特に等加速度運動・遠心力を正しく扱えるかを問うた。特に問 5 では, やや煩雑な計算を正しく完了させせることができるかを見た。

問 6-7: 慣性力を正しく扱うことができるかを問うた。問 7 では, 求められた方程式の形を図示する力を問うた。

問 8-10: 力の合成を理解し, 正しく計算をできるか試す問題である。図形の問題を正しく解くことが必要な力である。

解答例 [I]

問 1 力学的エネルギーの保存から

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 2mgR \tag{1}$$

よって $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$ となる。

問 2 点 A に来た時に遠心力が重力よりも大きければ良いので

$$m\frac{v_1^2}{R} \geq mg \tag{2}$$

よって, 求める答えは $v_0 \geq \sqrt{5gR}$ となる。

問 3 角度を考えるとそれぞれ

$$v_\mathrm{h} = -v_2 \sin\theta \tag{3}$$

$$v_\mathrm{v} = v_2 \cos\theta \tag{4}$$

となる。

問 4 半円筒の半分までたどり着かないと半円筒から離れることはないことに注意する。力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR(1+\sin\theta) \tag{5}$$

$$v_2^2 = v_0^2 - 2gR(1+\sin\theta) \tag{6}$$

半円筒から離れる直前には, 重力の半円筒中心向き成分と遠心力が釣り合っているので

$$m\frac{v_2^2}{R} = mg\sin\theta \tag{7}$$

よって

$$\sin\theta = \frac{v_2^2}{gR} \tag{8}$$

である。これを式 (6) に代入し,

$$v_2^2 = v_0^2 - 2gR\left(1 + \frac{v_2^2}{gR}\right) \tag{9}$$

整理すると

$$v_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gR}{3}} \tag{10}$$

が得られる。

問 5 半円筒を離れる瞬間の水平方向の速さは問 3 で求めたように $v_\mathrm{h} = -v_2\sin\theta$, 鉛直方向の速さは $v_\mathrm{v} = v_2\cos\theta$ となる。半円筒の半分よりも上に到達しないと, 物体が半円筒から離れることはないので $v_\mathrm{h} < 0$ であることに注意する。半円筒を離れた点を原点として, 右向き, 上向きをそれぞれ x, y 軸の正にとると

$$x = v_\mathrm{h}t \tag{11}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_\mathrm{v}t \tag{12}$$

となる。式 (11) より $t = x/v_\mathrm{h}$ なのでこれを式 (12) に代入すると

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_\mathrm{h}^2}x^2 + \frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{h}}x \tag{13}$$

という放物線の方程式が得られる。これが $y = -R(1+\sin\theta)$ に来た時の x の位置を求める。少し整理すると

$$gx^2 - 2v_\mathrm{h}v_\mathrm{v}x - 2v_\mathrm{h}^2R(1+\sin\theta) = 0 \tag{14}$$

を解けば良い。解の公式のうち適切なもの $(x < 0)$ を選ぶと

$$x = \frac{v_\mathrm{h}v_\mathrm{v} - \sqrt{v_\mathrm{v}^2v_\mathrm{h}^2 + 2gRv_\mathrm{h}^2(1+\sin\theta)}}{g} \tag{15}$$

$$= \frac{v_\mathrm{h}}{g}\left(v_\mathrm{v} + \sqrt{v_\mathrm{v}^2 + 2gR(1+\sin\theta)}\right) \tag{16}$$

$v_\mathrm{h} < 0$ であるためかっこの中の第二項は、符号が変わるとこに注意する。この x が,

$-R\cos\theta$ よりも小さければいいので求める条件は

$$\frac{v_{\mathrm{h}}}{g}\left(v_{\mathrm{v}}+\sqrt{v_{\mathrm{v}}^2+2gR(1+\sin\theta)}\right)<-R\cos\theta \tag{17}$$

ここで $v_{\mathrm{h}}=-v_2\sin\theta,\ v_{\mathrm{v}}=v_2\cos\theta,\ gR=v_2^2/\sin\theta$ を用いて少し整理すると

$$-\sin\theta\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin\theta}}\right)<-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{18}$$

となる。さらに整理すると

$$\cos\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)<\sqrt{\cos^2\theta+\frac{2(1+\sin\theta)}{\sin\theta}} \tag{19}$$

$(0<\theta<\pi/2)$ では, 両辺は正であるので二乗した後に整理すると

$$\cos^6\theta<\cos^2\theta\sin^4\theta+2(1+\sin\theta)\sin^3\theta \tag{20}$$

$$2(1+\sin\theta)\sin^3\theta-\cos^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)>0 \tag{21}$$

全て $\sin\theta$ に変換して不等式を解く。

$$2(1+\sin\theta)\sin^3\theta-(1-\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)>0 \tag{22}$$

$$(\sin\theta+1)^2(2\sin\theta-1)>0 \tag{23}$$

となり, $\sin\theta>1/2$, つまり $\theta>\pi/6$ が求める条件となり, $\theta_0=\pi/6$ となる。これを少し変形して問 4 で求めた関係より $\theta=\theta_0$ となるためには

$$\frac{v_0^2-2gR}{3gR}=\frac{1}{2} \tag{24}$$

となり求める条件は

$$v_0=\sqrt{\frac{7}{2}gR} \tag{25}$$

となる。

本解答では, 最初に t を消去し, x と y の関係式の議論をおこなったが、レールに再度着地する時間を (12) より求めて、その値を式 (11) に代入し、評価するという解法も可能である。

問 6 点 A に到達した時の小球の速さを v_4 とすると、力学的エネルギーと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv_4^2 + 2mgR = ma\ell \tag{26}$$

点 A と B の x 座標が等しいので, 半円筒を通過している間の慣性力は合計としては仕事をしないことに注意。これを用いると点 A での遠心力は

$$\frac{mv_4^2}{R} = \frac{2m}{R}\left(a\ell - 2gR\right) \tag{27}$$

これが重力 mg よりも大きければ良いのでもとめる条件は

$$\frac{\ell}{R} > \frac{5}{2}\frac{g}{a} \tag{28}$$

となる。

問 7 問 6 より, 物体は点 A を通過することがわかる。問 6 の前半と同じように力学的エネルギーと仕事の関係よりそのときの速度は水平方向に $-\sqrt{2gR}$ となる。$a = 3g$, $\ell = R$ を代入して, 水平方向 (x) と鉛直方向 (y) の座標の時間変化を求めると

$$x = -\sqrt{2gR}t + \frac{3}{2}gt^2 \tag{29}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + R \tag{30}$$

上の二つの式から t を消すと

$$x = -2\sqrt{R(R-y)} + 3(R-y) \tag{31}$$

極値を求めるために y で微分すると

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{R}{R-y}} - 3 \tag{32}$$

よって $y = (8/9)R$ で, 極小値 $x = -R/3$ をとる。問題文にあるようにこの運動は半円筒に再度衝突するので, 半円筒の方程式

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \tag{33}$$

と連立させる。まず, 式 (31) の両辺を二乗 (x は正であることに気をつける)

$$x^2 = 4R(R-y) - 12(R-y)\sqrt{R(R-y)} + 9(R-y)^2 \tag{34}$$

連立すると

$$R^2 - y^2 = 4R(R-y) - 12(R-y)\sqrt{R(R-y)} + 9(R-y)^2 \tag{35}$$

点 A から出発するので, それ以外の解を求める。よって両辺を $(R-y)$ で割る

$$R + y = 4R - 12\sqrt{R(R-y)} + 9(R-y) \tag{36}$$

整理すると

$$6\sqrt{R(R-y)} = 6R - 5y \tag{37}$$

さらに両辺を二乗して

$$36R(R-y) = 36R^2 - 60Ry + 25y^2 \tag{38}$$

少し整理して

$$(25y - 24R)y = 0 \tag{39}$$

よって, 解は

$$y = \frac{24}{25}R,\ 0 \tag{40}$$

となる。式 (31) に代入すると

$$x = -\frac{7}{25}R, R \tag{41}$$

前者の解は, 円筒が $x < 0$ のところまで続いていた場合の解なので適切でない。よって, 半円筒と物体が再着地する座標は $(R, 0)$ となる。これらを合わせると図は I-4 のようになる。

軌跡の方程式と円の方程式 $x^2 + y^2 = R^2$ という方程式を連立させることで, t のみの方程式にして、その軌跡を知るという解法も可能である。

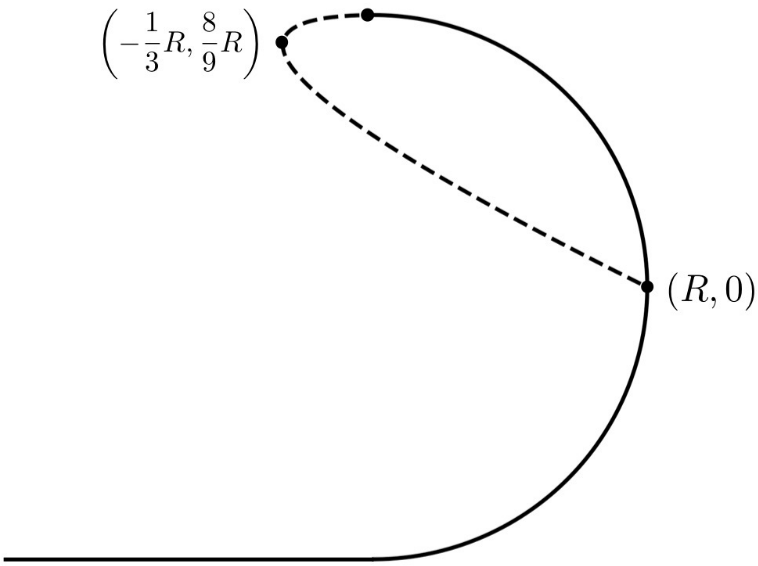

図 I-4:

問 8 高さ h に来た時の点 B からの水平距離は

$$\sqrt{R^2-(h-R)^2}=\sqrt{h(2R-h)} \tag{42}$$

よって, ゴムの長さは

$$\sqrt{h(2R-h)+h^2}=\sqrt{2Rh} \tag{43}$$

である。

問 9 力学的エネルギー保存より

$$\frac{1}{2}k\ell^2=\frac{1}{2}mv_3^2+\frac{1}{2}k(\sqrt{2Rh}-\sqrt{2}R)^2+mgh \tag{44}$$

$$v_3=\sqrt{\frac{k}{m}\left[\ell^2-2(\sqrt{Rh}-R)^2\right]-2gh} \tag{45}$$

となる。

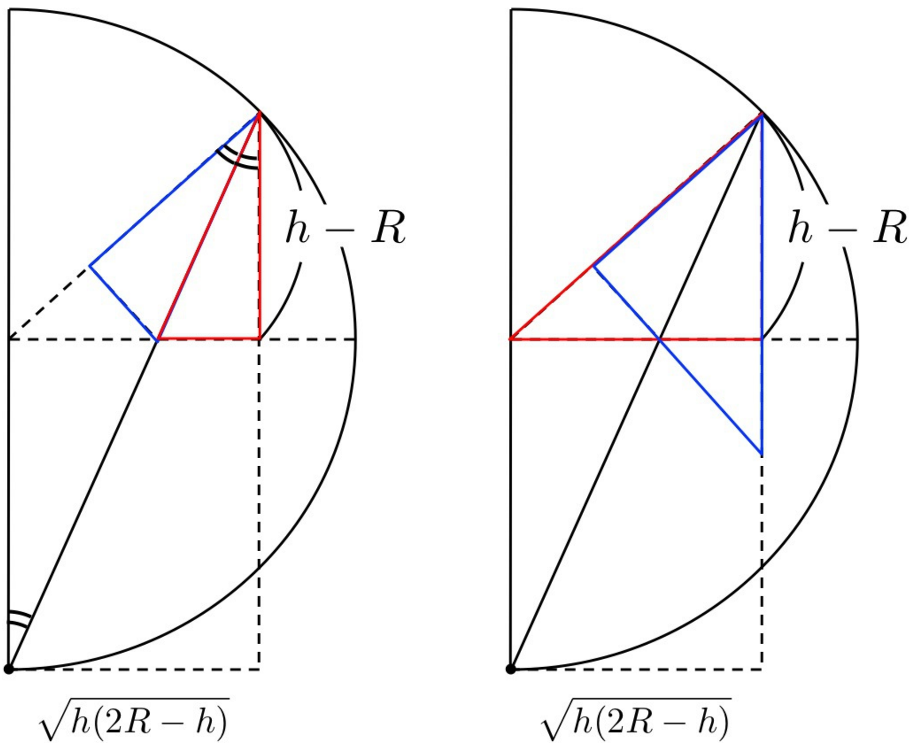

図 I-5:

問 10 図 I-5 にある赤と青の直角三角形がそれぞれ合同なので, 力の成分は簡単に分けることができる。ゴムの長さは, $\sqrt{2Rh}$。よって, ゴムの張力 T は

$$T = k\sqrt{2R}(\sqrt{h} - \sqrt{R}) \tag{46}$$

である。したがって $h > R$ では, ゴムは自然長より長い。図 I-5 左の直角三角形の斜辺の長さは, ゴムの長さを斜辺とする大きな直角三角形との相似関係から

$$\frac{h-R}{h}\sqrt{2Rh} = (h-R)\sqrt{\frac{2R}{h}} \tag{47}$$

動径方向の張力の大きさ T_r は

$$\begin{aligned} T_r &= T\frac{h-R}{(h-R)\sqrt{\dfrac{2R}{h}}} && (48)\\ &= T\sqrt{\frac{h}{2R}} && (49)\\ &= k(h-\sqrt{Rh}) && (50) \end{aligned}$$

遠心力 F_c は

$$\begin{aligned} F_\mathrm{c} &= \frac{mv_3^2}{R} && (51) \\ &= \frac{k}{R}\left[\ell^2 - 2(\sqrt{Rh} - R)^2\right] - \frac{2mgh}{R} && (52) \end{aligned}$$

重力の動径方向の大きさは $mg(h-R)/R$ となるので (図 I-5 右図参照), これらを合わせると垂直抗力を求めることができて, それが正であれば高さ h に半円筒から離れることなく到達することができる。よって求める条件は

$$\frac{k}{R}\left[\ell^2 - 2(\sqrt{Rh} - R)^2\right] - \frac{2mgh}{R} - k(h - \sqrt{Rh}) - mg\frac{h-R}{R} > 0 \qquad (53)$$

少し整理すると

$$\ell > \sqrt{3Rh - 5R\sqrt{Rh} + 2R^2 + \frac{mg}{k}(3h - R)} \qquad (54)$$

となり, これが求める条件である。