令和 2 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　　物理　課題 I, II

解答例

[I]

[出題意図]

ニュートンのプリンキピアにも登場する倒立円錐面内の小球の運動という有名な問題を，高校で学習する力学と数学を用いて解析させる。

まず座標系の変換に関する問題に解答させ，r と θ の時間依存性が分かればこの系の運動が必要十分に記述できることを理解させる。また，面積速度一定の法則が本問の場合にも成立することを証明させる。次に，エネルギー保存則と面積速度一定の法則から，この系の基本となる方程式を導かせる。どちらにも，微分に関する数学 III レベルの知識を要求している。その後，具体的な運動の様子に関する設問があり，円運動の場合や，それから外れた運動に関して考察させる。特に微小な振動の場合に関して定量的な解析を行わせ，この系の運動に関する理解を深めさせる。

ここでは主に微小振動を考察したが，大きな振幅の振動の場合にもさらなる想像力を働かせることで，簡単な設定のなかに隠された複雑な運動の解析という力学本来の魅力に，本問が少しでも接近するヒントを提供できればと考えている。

問 1

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt}\sin\alpha\cos\theta - \frac{d\theta}{dt}r\sin\alpha\sin\theta \quad (1)\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt}\sin\alpha\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}r\sin\alpha\cos\theta \quad (2)\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dr}{dt}\cos\alpha \quad (3)
\end{aligned}
$$

問 2

$$K = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\alpha\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \quad (4)$$

問 3

$$U = mgr\cos\alpha \quad (5)$$

問 4 P(x, y) および P'$\left(x + \frac{dx}{dt}\tau,\ y + \frac{dy}{dt}\tau\right)$ として，三角形 OPP' の面積は，数学公式を用いて，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left[x\left(y + \frac{dy}{dt}\tau\right) - y\left(x + \frac{dx}{dt}\tau\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\tau \quad (6)\\
&= \frac{1}{2}r\sin\alpha\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\alpha\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}r\sin\alpha\cos\theta\right)\tau \quad (7)\\
&\quad - \frac{1}{2}r\sin\alpha\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\alpha\cos\theta - \frac{d\theta}{dt}r\sin\alpha\sin\theta\right)\tau \quad (8)\\
&= \frac{1}{2}(r\sin\alpha)^2\frac{d\theta}{dt}\tau \quad (9)
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(r\sin\alpha)^2\frac{d\theta}{dt} \tag{10}$$

となる。

問 5 運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F\sin\alpha\cos\theta \tag{11}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -F\sin\alpha\sin\theta \tag{12}$$

である。また，上式 (1), (2) を t でさらに微分して，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\alpha\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha\sin\theta - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\alpha\sin\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\alpha\cos\theta \tag{13}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\alpha\sin\theta + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha\cos\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\alpha\cos\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\alpha\sin\theta \tag{14}$$

を得る。これらより，

$$\frac{d^2r}{dt^2}\sin\alpha\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha\sin\theta - r\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\alpha\sin\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\alpha\cos\theta = -\frac{F}{m}\sin\alpha\cos\theta \tag{15}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}\sin\alpha\sin\theta + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha\cos\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin\alpha\cos\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\alpha\sin\theta = -\frac{F}{m}\sin\alpha\sin\theta \tag{16}$$

さらに，式 (15) $\times \sin\theta -$ 式 (16) $\times \cos\theta$ より

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \tag{17}$$

であり，$r^2\dfrac{d\theta}{dt} =$ 一定 となる。これにより面積速度一定が証明される。

問 6

$$V(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha \tag{18}$$

$$= \frac{A}{2r^2} + B\,r \tag{19}$$

$$A = \frac{\ell^2}{m\sin^2\alpha} \tag{20}$$

$$B = mg\cos\alpha \tag{21}$$

$V(r)$ のグラフは図 1 に示した通り。

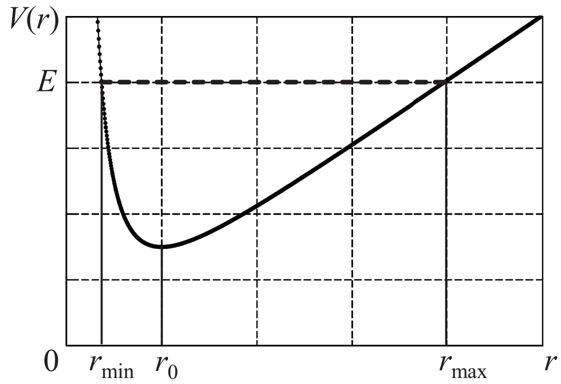


図 1: $V(r)$ の r 依存性。破線は全エネルギーが E の場合の可動領域を示す。

問 7 $\dfrac{dV(r)}{dr} = 0$ を満たす r が r_0 だから，

$$\ell = \sqrt{m^2 g {r_0}^3 \sin^2\alpha\cos\alpha} \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

またそのとき，本問式 (10) より

$$\omega_0 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{m r_0^2 \sin^2\alpha} \tag{24}$$

この 2 式より ℓ を消去して

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r_0\sin^2\alpha}} \tag{25}$$

これは，円運動ならば必ず成立する式である。この問題では振動数に興味があるので $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} > 0$ の場合だけを答えたが，ℓ や ω_0 に複号 ($\pm$) を残しておいてもよい。

問 8 (1) 図 1 の通り。

(2) $r = r_{\min}, r = r_{\max}$ の点では動径方向の速度は $\dfrac{dr}{dt} = 0$ なので，

$$V(r_{\min}) \;=\; V(r_{\max}) \tag{26}$$

となる。これより

$$\frac{A}{2r_{\min}^2} + Br_{\min} \;=\; \frac{A}{2r_{\max}^2} + Br_{\max} \tag{27}$$

である。また，$V(r)$ が最小となる点 $r = r_0$ は

$$r_0^3 = \frac{A}{B} \tag{28}$$

を満たす。これらより題意の式が証明される。

(3) 本問式 (11)，(12) を変形する。$r = r_{\min}$ および $r = r_{\max}$ の点においては，動径方向の速度は $\dfrac{dr}{dt} = 0$ となるので，右辺は因子 $\big(r - r_{\min}\big)\big(r - r_{\max}\big)$ を含まなければならない。また，本問式 (13) を用いる。

問 8(3) で述べられているふたつの同心円は次頁の図 2 に表記した。

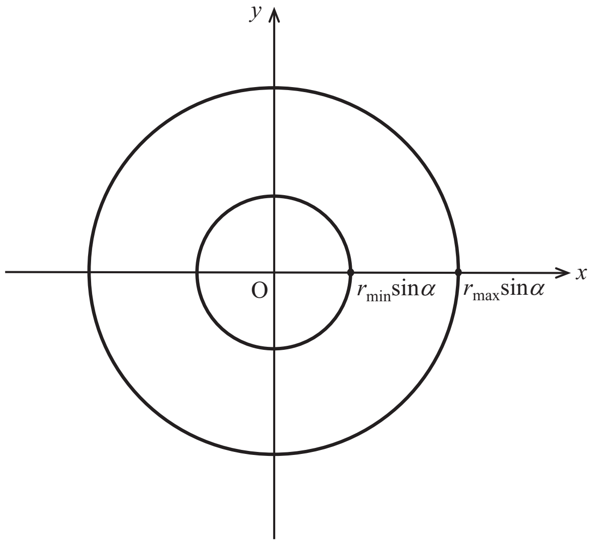


図 2: 半径 $r_{\min} \sin \alpha$ と $r_{\max} \sin \alpha$ のふたつの同心円。

問 9

$$k = \left.\frac{d^2V(r)}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{3\ell^2}{mr_0^4 \sin^2 \alpha} \tag{29}$$

これを用いて

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{m^2 r_0^4 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}\ell}{mr_0^2 \sin \alpha} \tag{30}$$

問 10

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{3} \sin \alpha \tag{31}$$

また，$\omega_r = \omega_0$ より $\sin \alpha = 1/\sqrt{3}$．すなわち $\alpha = \sin^{-1}(1/\sqrt{3}) \simeq 35.3°$．

問 11　(1) 図 3 の通り。

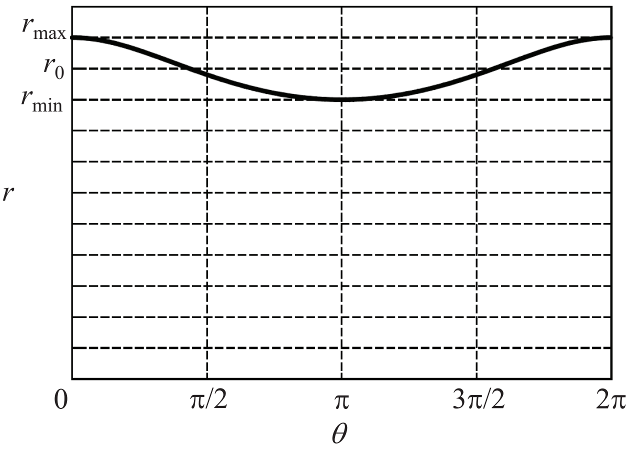


図 3: 問 11 (1) の解答。

(2) 軌跡は，図 4 のように，点線で示す内接円と外接円に囲まれた歪んだ円となる。

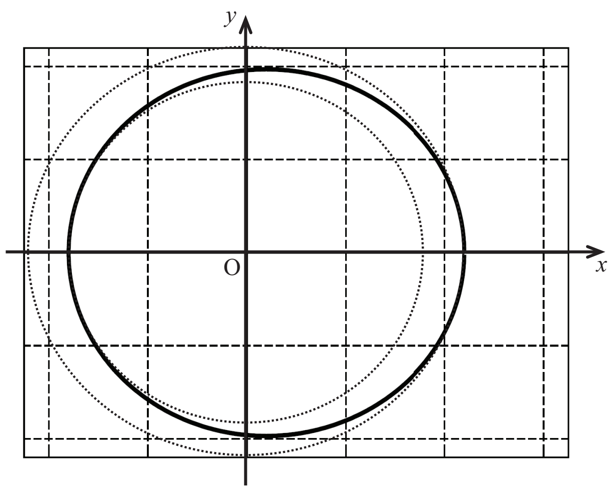


図 4: 問 11 (2) の解答。点線は半径 $r_{\min}\sin\alpha$ と $r_{\max}\sin\alpha$ のふたつの同心円を表す。

問 12 点 P の軌跡は図 5 に示す通り。小球は番号の順に運動する。また，$3/2 = \sqrt{3}\sin\alpha$ より $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$，つまり $\alpha = 60^\circ$ である。

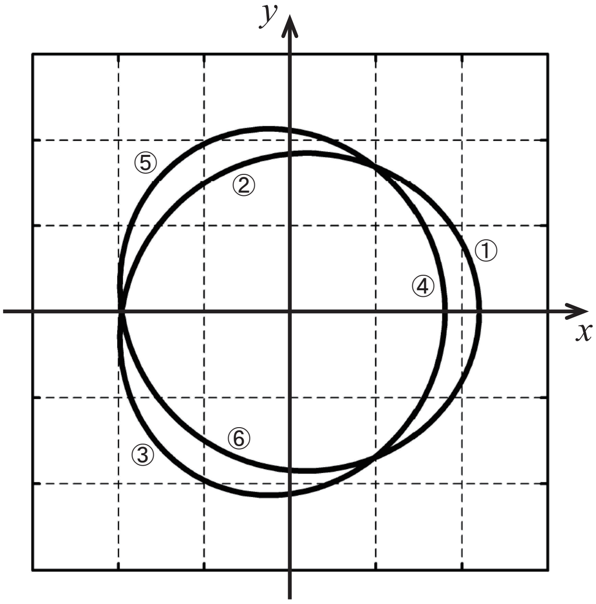


図 5: 問 12 の解答（前半）。小球は 2 回 回転する間に 3 回振動する。

r と θ の関係は図 6 に示す通りである。

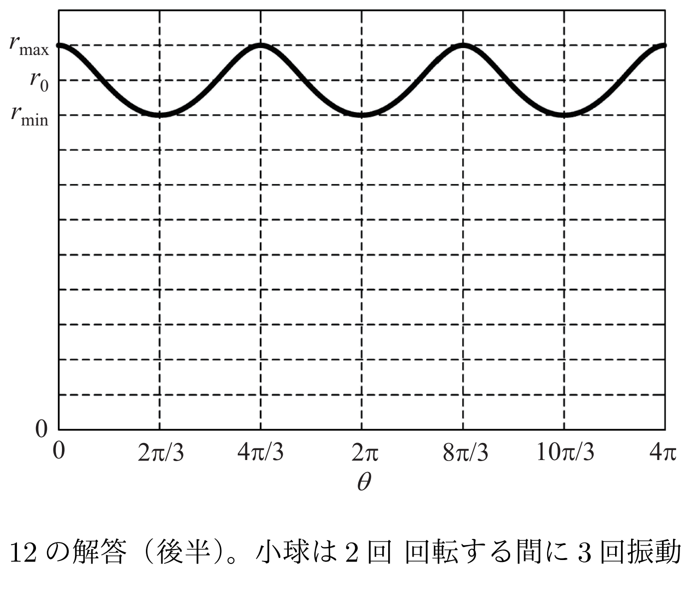


図 6: 問 12 の解答（後半）。小球は 2 回 回転する間に 3 回振動する。

[II]

[出題意図]

電気抵抗と電流がつくる磁場についての知識と計算能力を試している。前半は電気抵抗に関する問題で，問 3 では高度な数学的な能力を，問 4 ではジュール熱に関する理解度の高さを問うている。問 5 からの後半は磁場がつくる磁場を求める問題である。交流用の電源ケーブルや，同軸ケーブルでは周囲に磁場が漏れにくくなっていることを理解できるかを問うている。問 7 から問 10 は大学での学習に欠かせない，置換積分を理解しているか試す問題。やや難問なので，ヒントが与えてある。問 11 は考える力を試す問題で，理由を想像する力とそれを表現する能力を試している。

問 1 並行に置かれているので，抵抗にかかる電圧も等しいことに注意すれば容易に求められる。

$$R_1 = \frac{\rho\ell}{S_1} \tag{1}$$
$$R_2 = \frac{\rho\ell}{S_2} \tag{2}$$
$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{V}{\ell\rho}S_1 \tag{3}$$
$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{V}{\ell\rho}S_2 \tag{4}$$

問 2 設問の指示に従うと，電気抵抗は次のように積分で表される。

$$R = \int_0^\ell \frac{\rho}{S}dz \tag{5}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\rho\ell}{S_2 - S_1}\ln\dfrac{S_2}{S_1} & (S_1 \neq S_2) \\ \dfrac{\rho\ell}{S_1} & (S_1 = S_2) \end{cases} \tag{6}$$

また与えられた条件より

$$S_1 = \overline{S}\,(1-\alpha) \tag{7}$$
$$S_2 = \overline{S}\,(1+\alpha) \tag{8}$$

が得られるので，これらを式 (6) に代入して

$$R = \begin{cases} \dfrac{\rho\ell}{\overline{S}}\dfrac{1}{2\alpha}\log\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) & (\alpha \neq 0) \\ \dfrac{\rho\ell}{\overline{S}} & (\alpha = 0) \end{cases} \tag{9}$$

が得られる。得たい結果は $S_1 \neq S_2$ の場合なので，両端の断面積が等しい $(S_1 = S_2)$ ときを場合分けしなくても，減点はしない。

問 3 式 (9) は α の偶関数であるので，$\alpha > 0$ の場合に $\alpha = 0$ の場合より大きくなることを示せば

良い。ここで関数

$$f(\alpha) \;=\; \log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \tag{10}$$

を考えると，

$$f(0) \;=\; 0 \tag{11}$$
$$\frac{df}{d\alpha} \;=\; \frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1-\alpha} \;=\; \frac{2}{1-\alpha^2} \;>\; 2 \tag{12}$$

である。従って，$\alpha > 0$ では

$$f(\alpha) \;>\; 2\alpha \tag{13}$$

が得られる。従って $R \geqq \rho\ell/\bar{S}$ である。電卓の使用が許されているので，$\alpha = 0,\ 0.01,\ 0.02,\ \ldots$ を代入することにより示してもよい。

問 4 直径を ϕ，導線の長さを ℓ とすると，抵抗 R は

$$R \;=\; \frac{4\rho\ell}{\pi\phi^2} \;=\; 0.197\ \Omega \tag{14}$$

となる。100 V の電圧で 500 W 消費するので，この機器の抵抗値は 20 Ω である。導線の抵抗は 機器の抵抗の 1/100 なので 5W ほどが導線で消費されてしまう。

問 5 xy 面を横切る座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，z 軸に平行な電流 I が位置 $(x,\ y)$ に生じる磁場の大きさは

$$H \;=\; \frac{I}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \tag{15}$$

向きは $\left[\frac{y_0-y}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},\ \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right]$ に平行なので

$$H_x \;=\; -\left(\frac{I}{2\pi}\right)\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{16}$$
$$H_y \;=\; \left(\frac{I}{2\pi}\right)\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{17}$$

と表される。従って設問の場合は

$$H_x \;=\; \frac{I}{2\pi}\left[-\frac{y}{(x-a)^2+y^2}+\frac{y}{(x+a)^2+y^2}\right] \tag{18}$$
$$H_y \;=\; \frac{I}{2\pi}\left[\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}-\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}\right] \tag{19}$$

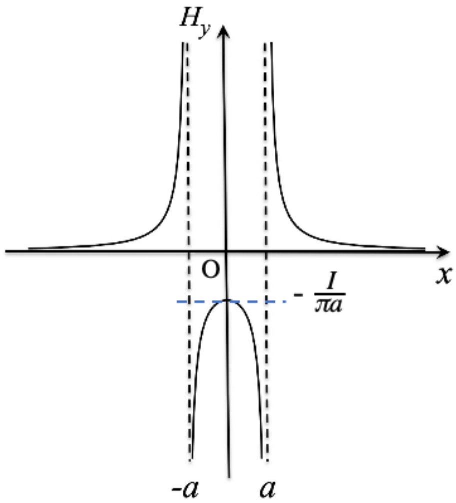
となる。$y=0$ では

$$H_x \;=\; 0, \quad H_y \;=\; \frac{aI}{\pi\left(x^2-a^2\right)} \tag{20}$$

$x=0$ では

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{aI}{\pi\left(a^2+y^2\right)} \tag{21}$$

となる。H_y はそれぞれは以下の図のように変化する。



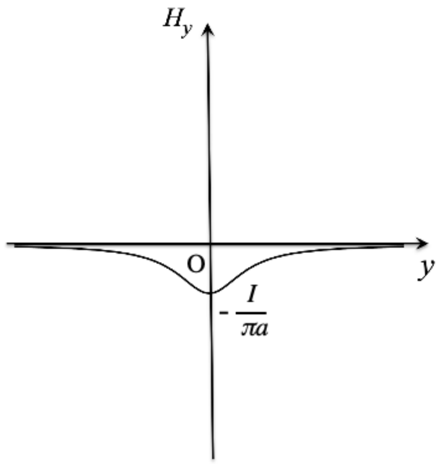


図 3　(左)x 軸上と (右) y 軸上での磁場の強さ

問 6 $(x,\ y)=(0,\ 0)$ での磁場は $(H_x, H_y)=\left(0,\ -\frac{2I}{\pi d}\right)$ で距離 d が短いほど磁場は強くなる。

$(x,\ y)=(r,\ 0)$ では $(H_x, H_y)=\left[0,\ \frac{2Id}{\pi\left(4r^2-d^2\right)}\right]$ で，距離 d が短いほど磁場は弱くなる。

$(x,\ y)=(0,\ r)$ では $(H_x, H_y)=\left[0,\ -\frac{2Id}{\pi\left(4r^2+d^2\right)}\right]$ で，距離 d が短いほど磁場は弱くなる。

問 7

$$H = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta-a)^2+r^2\sin^2\theta}} \tag{22}$$

$$H_x = \frac{I}{2\pi}\frac{r\sin\theta}{(r\cos\theta-a)^2+r^2\sin^2\theta} \tag{23}$$

$$H_y = \frac{I}{2\pi}\frac{r\cos\theta-a}{(r\cos\theta-a)^2+r^2\sin^2\theta} \tag{24}$$

$$H_\theta = -H_x\sin\theta + H_y\cos\theta \tag{25}$$

$$= \frac{I}{2\pi}\frac{r-a\cos\theta}{r^2+a^2-2ar\cos\theta} \tag{26}$$

問 8

$$\langle H_\theta(r)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_\theta\, d\theta = \frac{I}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r-a\cos\theta}{r^2+a^2-2ar\cos\theta}d\theta \tag{27}$$

ここで $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ を使って置換積分する。

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} && (28)\\ dt &= \frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\,d\theta && (29)\\ d\theta &= \frac{2}{1+t^2}\,dt && (30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle H_\theta(r)\rangle &= \frac{I}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\left(1+t^2\right)-a\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)\left[\left(r^2+a^2\right)\left(1+t^2\right)-2ar\left(1-t^2\right)\right]}\,dt && (31)\\ &= \frac{I}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(r+a)t^2+(r-a)}{\left(1+t^2\right)\left[\left(r^2+a^2\right)\left(1+t^2\right)-2ar\left(1-t^2\right)\right]}\,dt && (32)\\ &= \frac{I}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{(1+t^2)}+\frac{r^2-a^2}{[(r+a)^2t^2+(r-a)^2]}\right\}dt && (33)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(r+a)^2t^2+(r-a)^2}\,dt &= \frac{1}{(r+a)|r-a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}\,ds && (34)\\ &= \frac{\pi}{(r+a)|r-a|} && (35)\end{aligned}$$

を利用すると

$$\langle H_\theta(r)\rangle = \frac{I}{4\pi r}\left[1+\frac{r-a}{|r-a|}\right] = \begin{cases}\dfrac{I}{2\pi r} & (r>a)\\ 0 & (r<a)\end{cases} \qquad (36)$$

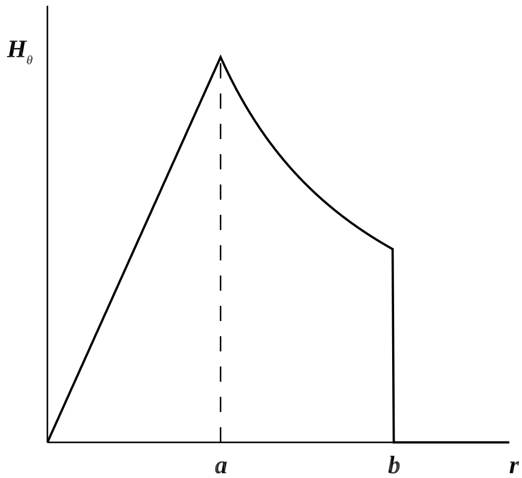
問 9 設問によれば，z 軸から半径 r の円の内側を流れる電流の総量 I_r は

$$I_r = \begin{cases}\dfrac{Ir^2}{a^2} & (r \leqq a)\\ I & (a<r<b)\\ 0 & (r>b)\end{cases} \qquad (37)$$

となる。また磁場の強さは z 軸からの距離だけの関数で θ 方向を向いているので，

$$H_\theta = \begin{cases}\dfrac{Ir}{2\pi a^2} & (r \leqq a)\\ \dfrac{I}{2\pi r} & (a<r<b)\\ 0 & (r>b)\end{cases} \qquad (38)$$

である。



問 10

$$H_x = -\frac{Iy}{2\pi(x^2+y^2)} \tag{39}$$

$$H_y = \frac{Ix}{2\pi(x^2+y^2)} \tag{40}$$

を積分して証明する。$x = a$ で $-a \leqq y \leqq a$ の区間では

$$\int_{-a}^{a} H_y dy = \frac{Ia}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{a^2+y^2}\,dy \tag{41}$$

$$= \frac{I}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{I}{4} \tag{42}$$

となる (途中で $y = a\tan\theta$ による置換積分を行なった)。辺の長さは $2a$ なので，平均の磁場強度は $\dfrac{I}{8a}$ である。他の区間でも正方形の各辺に沿った方向の磁場の積分は $I/4$ となるので，合わせると I となる。

問 11 コイルはその中心の軸を中心とする回転に対して対称なので，磁場の強さや向きは軸からの距離 r だけの関数である。またコイルが無限に長いので，磁場はコイルの外にはなく，コイルの中では軸の方向に沿っている。これらのことを考え，図 4 に示すように，コイルの軸を含む断面に軸方向の長さ ℓ の長方形を考え，アンペールの法則を適用する。この長方形を貫く電流は $n\ell I$ である。またこの長方形で，辺に沿った磁場があるのはコイルの中で軸方向の辺だけである。この磁場を H とすると，$n\ell I = \ell H$ という等式が得られる。磁場の値は辺のある場所には依らないので，コイルの中のどの場所でも $H = nI$ の磁場となることが分かる。

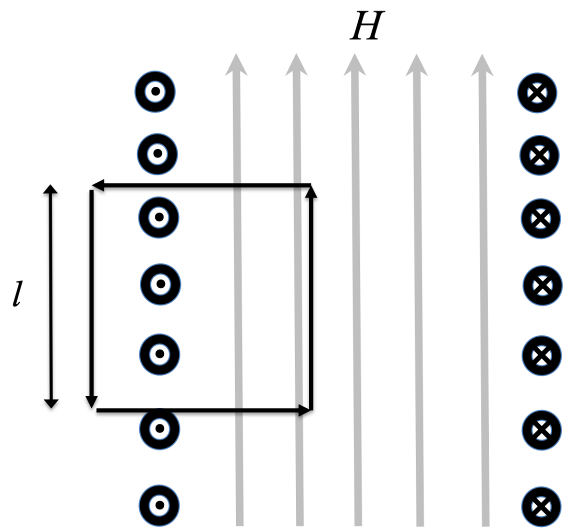


図 4　コイルの断面

問 12 次のような事柄を指摘することを期待している。

- 導線の周囲にある電子機器に影響を与える。
- 磁場を作ることによりエネルギーが損失する。
- 磁場は周囲の電気回路に影響を与えるが，導線や同軸ケーブルにはその反作用が働くはずである。周囲の影響を受けることは雑音が入りやすいことど同義である。