令和3年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理

課題I, II

(9:00-15:00)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

質量 m，半径 a の同じ材質・形状の円板 A, B を用意する。これらの円板を一様に粗な水平面を滑らせ，目標とする位置に止めるカーリングのようなゲームを考えよう。円板と水平面との間の動摩擦係数を μ'，円板同士の間の反発係数を e，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えなさい。

まず 2 つの円板の中心が水平面上の x 軸に沿って運動する場合を考えよう。

問 1 円板 A を初速度 u で滑らせたところ，図 1 のように円板の半径と同じ距離 a だけ進んで止まった。静止するまでに要した時間 τ と，動摩擦係数 μ' を a, g, u を用いて表しなさい。

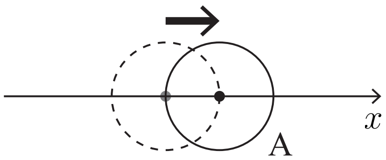

図 1

以下の問いでは問 1 で得られた関係式を使い，最終的な答えは μ' を使わずに表しなさい。

問 2 円板 A を ℓ だけ進めて静止させるには，初速度を u の何倍にしたら良いか答えなさい。

問 3 円板 A を静止している円板 B に衝突させたところ，図 2 のように円板 A は向きを変えずに運動し，円板 B は ℓ_{B} だけ進んで静止した。この衝突で円板 A が円板 B に与えた力積の大きさを a, ℓ_{B}, m, u を用いて表しなさい。

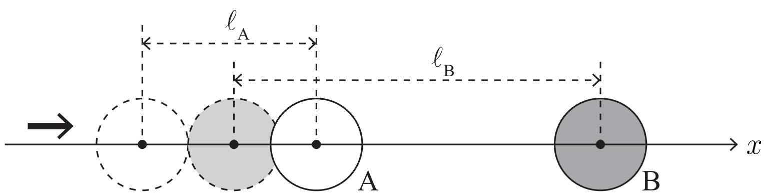

図 2

問 4 問 3 の設定で円板 A が衝突後に進んだ距離 ℓ_{A} を ℓ_{B}, e を用いて表しなさい。ただし衝突の間に円板にはたらく水平面からの摩擦力は無視する。

問 5 中心が位置 $x = b$ (ただし $b > 2a$) で静止している円板 B に，位置 $x = 0$ を速度 v で通過した円板 A が衝突した。円板 A の中心を位置 $x = \ell$ (ただし $\ell > b - 2a$) に静止させるには，速度 v を u の何倍にしたら良いか答えなさい。またこのとき円板 B が静止する位置を求めなさい。

次に衝突するときの速度差が，2 つの円板の中心を結ぶ直線に対して傾いている場合を考えよう。

問 6 図 3 のように衝突する直前，円板 B の速度 $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ は円板 A の速度 $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ と大きさが等しく，向きが反対である場合 ($\vec{v}_{\mathrm{B}} = -\vec{v}_{\mathrm{A}}$) を考えよう。円板 A の速度 $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ は円板 A と B の中心を結ぶ直線に平行な成分 $\vec{v}_{\parallel}$ とそれに垂直な成分 $\vec{v}_{\perp}$ に分解できる ($\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$)。衝突の際，円板同士の間の摩擦は無視できるとすると，垂直成分 $\vec{v}_{\perp}$ は変化しない。一方，平行成分 $\vec{v}_{\parallel}$ の変化は一直線上の衝突の場合と同様に反発係数 e で与えられる。このとき，衝突後の円板 A と B の速度 $\vec{v}_{\mathrm{A}}{}'$ と $\vec{v}_{\mathrm{B}}{}'$ を $\vec{v}_{\parallel}$ と $\vec{v}_{\perp}$ を用いて表しなさい。

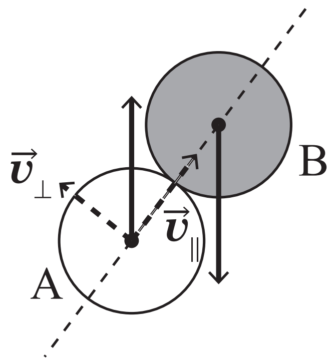

図 3

問 7 もし問 6 の衝突の際に円板同士の間に摩擦がはたらくと，円板 A と B にどのような運動が加わるだろうか？またその運動の様子から，衝突の際の摩擦の大きさを調べる方法を簡潔に述べなさい。

問 8 衝突の間に円板にはたらく水平面からの摩擦力は無視する。このとき衝突前の円板 B とともに動いている観測者から見ても同じ法則が成り立つ。このことを考慮して，静止している円板 B に円板 A が速度 $\vec{w}_{\mathrm{A}} = \vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}$ で衝突するとき，衝突後の円板 A と B の速度 $\vec{w}_{\mathrm{A}}{}'$ と $\vec{w}_{\mathrm{B}}{}'$ を $\vec{w}_{\parallel}$ と $\vec{w}_{\perp}$ を用いて表しなさい。

ここまでの結果を使って，円板Aを静止している円板Bと衝突させ，円板Bを目標Gの位置に止めることを考えよう。図4のように円板AとBの初期の中心位置をそれぞれ$(\ell, 0)$，$(r\cos\theta, r\sin\theta)$，目標Gの位置を原点$(0,0)$とする。円板Aに初速度$(v_x, v_y)$を与えたところ，図5のように円板AとBは点Pで衝突した。ただし$0 < r < \ell - 2a$である。問9から問11の設問では円板Bが衝突後に目標Gで静止したとして答えなさい。ただし円板同士の間の摩擦は無視する。

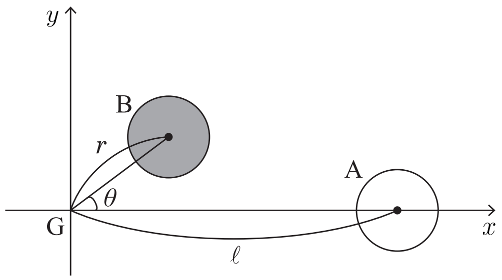

図4

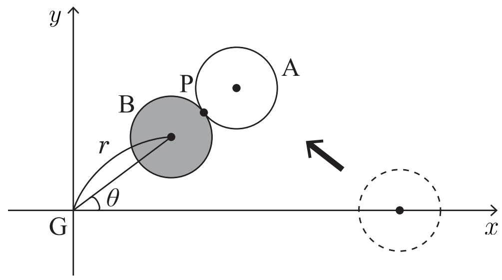

図5

問9 円板Bの衝突直後の速度のうちベクトルBPに平行な成分はuの何倍になるか求めなさい。向きはBからPに向かう方向を正とすること。

問10 円板Bの衝突直後の速度を$\vec{v}_{\mathrm{B}} = (v'_{\mathrm{B}x}, v'_{\mathrm{B}y})$とする。この速度を$a$, r, u, θを用いて表しなさい。

問11 円板Bと衝突した時刻での円板Aの中心の座標$(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$を$a$, r, θを用いて表しなさい。

問12 円板Bを目標Gで静止させることができるのは，角度θがある範囲に限られる。この範囲をa, ℓ, r，$\cos\theta$を用いた不等式で表しなさい。

問13 $\ell = 4a$の場合について，目標Gに静止させることができる円板Bの初期位置を求め，その中心位置のとりうる範囲を図示しなさい。この設問の答えは専用の方眼紙を用い，図4のように平面図として記すこと。必要ならば電卓を用いて良い。

問14 $\ell = 4a$, $r\cos\theta = \dfrac{2}{5}a$, $r\sin\theta = \dfrac{3}{10}a$, $e = \dfrac{3}{7}$で，円板Bが目標Gで静止するときの円板Aの初速度ベクトルを求めなさい。

（空白のページ）

[II]

電場中に置かれた金属（導体）の表面に電荷が現れる現象を静電誘導という。ここでは，真空中に置かれた金属の表面に誘起される電荷分布について調べよう。

問 1 微小な領域を考えると，なめらかな金属表面は平坦と考えてよい。図 1 のように，金属のすぐ外側および金属の内側に，表面に平行で同じ形の小さな面 S， S′ を設ける。これらの面 S，S′ と表面と直交する側面で囲まれた微小な領域を考えると，表面の電荷密度 σ（単位面積当たりの電気量）と表面上の電場 E（ただし金属表面外向きを正とする）には式 (1) で表される関係があることを，電気力線の数を考えることで説明せよ。ここで「表面上の電場」とは，金属表面のすぐ外側における電場のことである。また，k は真空におけるクーロンの法則の比例定数である。

$$E = 4\pi k \cdot \sigma \tag{1}$$

金属表面のすぐ外側では電場は表面に垂直なので，図 2 のように表面に垂直に r 軸を取ると，表面近くでは電位 V は座標 r の関数となり，表面上の電場 E は

$$E = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V(r_0) \tag{2}$$

のように $V(r)$ の微分の表面上での値（$V(r)$ を微分してから，表面上の座標 $r = r_0$ を代入した値）で与えられることが知られている。以上の式 (1)，(2) を用いると，表面近くの電位 $V(r)$ から表面の電荷密度 σ を求めることができる。

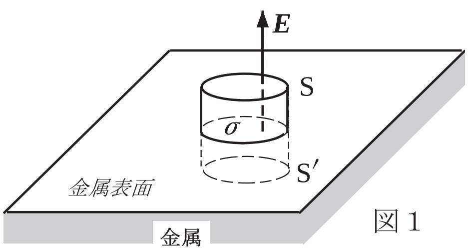

図 1

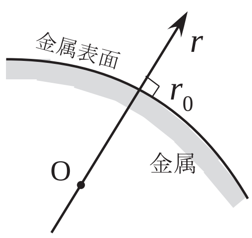

図 2

この原理を用いて，まず，金属板の表面に誘起される電荷分布を調べよう。図 3 のように，$x = 0$ の yz 平面を表面として，接地された十分厚い金属板を $x \leq 0$ の領域に置く。x 軸上の点 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$（ただし $a > 0$）に点電荷 q（ただし $q > 0$）を置いたとき，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$（ただし $x > 0$）での電位 $V(\mathrm{P})$ は，点電荷 q による電位と，金属板の表面に誘起された電荷による電位の和（重ね合わせ）で与えられる。W. トムソンは，後者の電位は x 軸上の点 $\mathrm{A}'(a', 0, 0)$（ただし $a' < 0$）に点電荷 q' を置いたものと同じになること

を見出した。このときの点電荷 q' を鏡像電荷という。すなわち，無限遠点 $x = +\infty$ を電位の基準にとると，点 P における電位は次式となる。

$$V(\mathrm{P}) = k\frac{q}{\mathrm{PA}} + k\frac{q'}{\mathrm{PA'}} \tag{3}$$

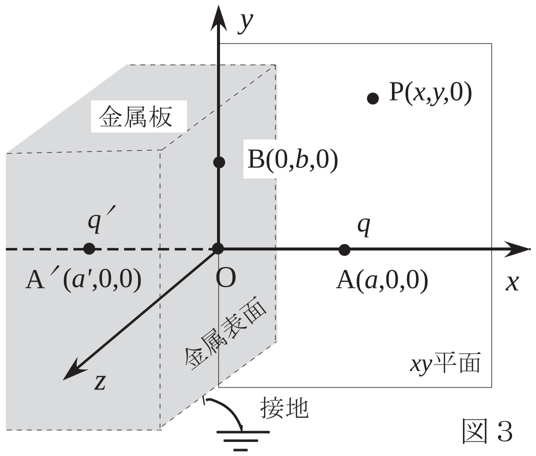

図 3

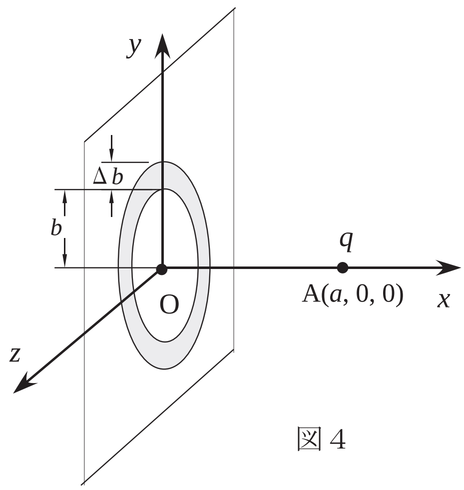

図 4

問 2 $V(\mathrm{P})$ を x,y を用いて表せ。次に，金属板は接地されているので，点 P が表面（$x = 0$）のどの位置（任意の y）でも $V = 0$ となることを用いて，a'，q' を求めよ。

問 3 x 軸が表面に垂直であることに注意し，金属板の表面の位置 $\mathrm{B}(0, b, 0)$ に誘起される電荷密度 $\sigma(b)$ を求め，b の関数としてグラフに描け。

問 4 金属板の表面に誘起された全電荷 Q' は，問 3 の $\sigma(b)$ を用いて求まる。誘起される電荷分布は x 軸周りに回転対称性（x 軸周りに回転しても同じ電荷分布となっていること）を持つこと，図 4 のように yz 平面内の原点 O からの半径が b と $b + \Delta b$ の間にある細い円環の面積は $2\pi b \cdot \Delta b$ であることに注意すると，

$$Q' = \int_0^{+\infty} \sigma(b) \cdot 2\pi b \; \mathrm{d}b \tag{4}$$

である。b に関する積分を実行して Q' を求めよ。

問 5 金属板の表面に誘起された電荷によって，点 A の電荷 q には x 軸の負の方向に力がはたらく。その力の大きさ F は，次式で与えられる。

$$F = \left| \int_0^{+\infty} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \cdot \left[k\frac{q \cdot \sigma(b) \cdot 2\pi b}{a^2 + b^2} \right] \mathrm{d}b \right| \tag{5}$$

被積分関数の意味を説明せよ。また，積分を実行して F を求めよ。次にこの結果から，電荷 q にはたらく力は，表面に誘起された電荷の代わりに，鏡像電荷 q' を考えたときの力と同じになっていることを示せ。

次に，原点 O を中心として置かれた，半径 R の金属球の表面に誘起される電荷分布を調べよう。ただし金属球は接地されているとする。x 軸上の点 A$(a, 0, 0)$（ただし $a > R$）に点電荷 q（ただし $q > 0$）を置いた。この場合も，誘起される電荷分布は x 軸周りに回転対称性を持つので，図 5 のような xy 平面内だけを考えることにする。

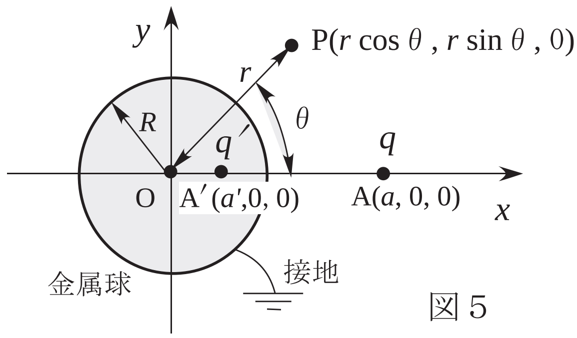

図 5

問 6 金属球外の点 P（その座標を $(x, y, 0) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ とする。r は原点からの距離，θ は OP と x 軸の間の角度である）における電位 $V(\mathrm{P})$ を考える。電位は，点電荷 q による電位と，表面に誘起された電荷による電位の和で与えられるが，この場合も，後者の電位は x 軸上の点 A′$(a', 0, 0)$ に鏡像電荷 q' を置いたものと同じになることが知られている。すなわち，無限遠点 $r = +\infty$ を電位の基準にとると，点 P における電位は，

$$V(\mathrm{P}) = k\frac{q}{\mathrm{PA}} + k\frac{q'}{\mathrm{PA'}} \tag{6}$$

となる。金属球は接地されているので，点 P が表面（$r = R$）のどの位置（任意の θ）でも $V = 0$ となることを用いて，a'，q' を求めよ。

問 7 θ を一定に保ったまま r を大きくする方向（つまり r 軸）が球表面に垂直であることに注意して，問 3 と同様に，金属球の表面の位置 B$(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ を求めよ。次に，$a = 2R$ および $a = 10R$ の場合の $\sigma(\theta)$ を，θ の関数としてグラフに描け。

次に，点電荷を使って，金属球のない真空中に一様な電場を作ることを考える。点 A$(a, 0, 0)$ に点電荷 q を，点 C$(-a, 0, 0)$ に点電荷 $-q$ を置いた。

問 8 原点 O にできる電場の強さを E_0 とするためには，q をいくつにすればよいか。また，点 P$(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ における電位は，点電荷 q，および $-q$ による電位の和でつくられる。点 P の電位 $V_1(\mathrm{P})$ を，E_0 を用いて（q を用いずに）表せ。

問 9 E_0 を一定値に保ったままで $a \to +\infty$（同時に $q \to +\infty$）とすると，原点付近には強さ E_0 のほぼ一様な電場ができることになる。このとき $r \ll a$ なので，$\dfrac{r}{a}$ の 2 次以上の項を無視し，$V_1(\mathrm{P})$ を E_0, r, θ を用いて表せ。必要なら $|t| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1+t)^\alpha \fallingdotseq 1 + \alpha t$ （ただし α は実数）を用いてよい。

最後に，x 軸の負の方向を向いた強さ E_0 の一様な電場がある場合に，原点 O を中心として置かれた半径 R の接地された金属球の表面に誘起される電荷分布を，鏡像電荷の考え方，および問 9 の結果を応用して求めてみよう。

点 $\mathrm{A}(a,0,0)$ に点電荷 q を，点 $\mathrm{C}(-a,0,0)$ に点電荷 $-q$ を置いた（ただし $a>R$）。このとき，金属球外の点 $\mathrm{P}(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$（ただし $r>R$）における電位は，点電荷 q，$-q$，およびそれぞれの鏡像電荷による電位の和でつくられる。

問 10 2 つの鏡像電荷が金属球外の点 P につくる電位 $V_2(\mathrm{P})$ を求めよ。次に，E_0 を一定値に保ったままで $a\to+\infty$ とすると，$R, r \ll a$ なので $\dfrac{R^2}{ar}$ の 2 次以上の項を無視し，問 9 と同じ近似式を用いることで，$V_2(\mathrm{P})$ を E_0, r, R,θ を用いて表せ。

問 11 問 10 の電位が $V_2=\phi$(一定値) となる等電位面の大まかな様子を，xy 平面上で描け。$\phi=0$，および ϕ が正および負で，かつ値が異なる場合の違いが分かるように描くこと。次に，電気力線の様子を同じ図上に描け。電場の方向が分かるように，電気力線には矢印をつけること。

以上から，一様な電場 E_0 中にある金属球の外の点 P の電位は，問 9，10 の結果を用いて $V(\mathrm{P})=V_1(\mathrm{P})+V_2(\mathrm{P})$ となる。

問 12 一様な電場 E_0 中にある金属球の表面の位置 $\mathrm{B}(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ を $V(\mathrm{P})$ から求め，θ の関数としてグラフに描け。

金属球は接地されていなくても，金属球がもともと電荷を持っていない場合には，一様な電場中では問 12 で求めた電荷分布と同じ電荷分布が現れることが知られている。

問 13 図 6 のように，一様な電場中に同じ大きさの金属球（接地されていない。もともと電荷を持っていない）を 2 つ離しておいたとき，2 つの球の間にはたらく力は引力となるか，斥力となるかを，(a)，(b) それぞれの場合について、2 つの球の表面に現れる電荷分布の様子を描いて議論せよ。

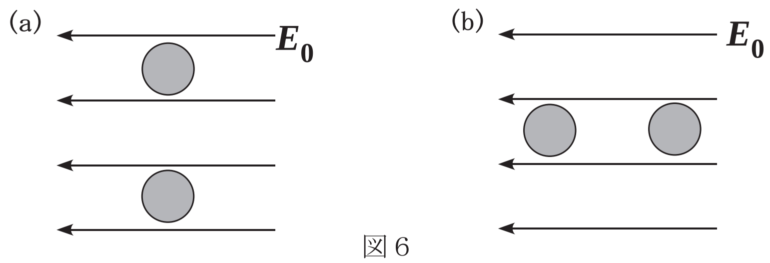

図 6