令和４年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　数学

解答例

解答例：数学

問 1　(1) 真数は正であるので

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) > -2$$
$$x > -2$$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいので

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{3}}(x+2) &> \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\\ x+2 &< \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\\ x &< 7\end{aligned}$$

よって

$$-2 < x < 7$$

(2) 複素数を用いると

$$z^6 = -8 = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi)$$

よって

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}),\ \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),\ \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}),$$
$$\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}),\ \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}),\ \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} \pm i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} \pm i),\ \pm\sqrt{2}i$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k-1)\\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - n\\ &= \frac{1}{6}n(4n^2+6n+2-3n-3-6) = \frac{n}{6}(4n^2+3n-7)\\ &= \frac{n}{6}(n-1)(4n+7)\end{aligned}$$

(4) $\sin x = a$ とすると

$$\begin{aligned} 3\sin 3x + 4\cos 2x + 1 &= 3(3\sin x - 4\sin^3 x) + 4(1 - 2\sin^2 x) + 1 \\ &= 3(3a - 4a^3) + 4(1 - 2a^2) + 1 = -12a^3 - 8a^2 + 9a + 5 = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 12a^3 + 8a^2 - 9a - 5 = 0 \\ (a+1)(2a+1)(6a-5) = 0 \\ a = \frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -1 \end{aligned}$$

$\pi \leqq x < 2\pi$ より

$$x = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

(5)

$$\begin{aligned} 2^{49} = (2^7)^7 = 128^7 \\ 5^{21} = (5^3)^7 = 125^7 \end{aligned}$$

よって 2^{49} の方が大きい。

問 2

$$y' = \frac{3x^2 - 8x - 3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-3)(3x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0$ は $x = 3,\ -\frac{1}{3}$ のとき。増減表より $x = 3$ のとき極小値 $-\frac{1}{2}$，$x = -\frac{1}{3}$ のとき極大値 $\frac{9}{2}$ をとる。
$x = 0$ のとき $y = 4$，$x = \frac{4}{3}$ のとき $y = 0$，$x \to \pm\infty$ のとき $y \to 0$ より $y = 0$ が漸近線となり，グラフは図 1 のようになる。

問 3

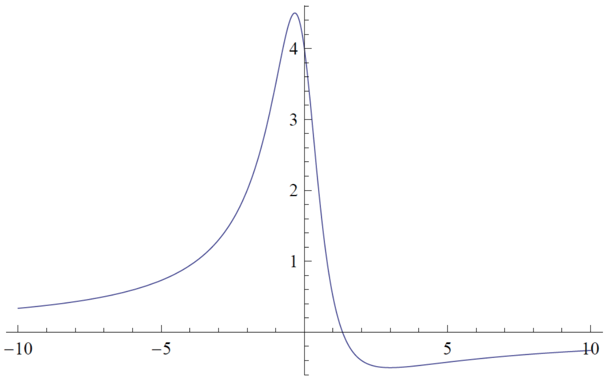

図 1

問 3　(1)　(正四面体 ABCD の体積) = (4× OBCD の体積)

ABCD の体積 $= \frac{1}{3} \times \triangle$ BCD $\times h$ (高さ)

$$\triangle \mathrm{BCD} = a \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

よって

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\mathrm{OABC} = \frac{\sqrt{2}}{48}a^3$$

(2)　(OBCD の体積)　$= \frac{1}{3} \times \triangle \mathrm{BCD} \times r$ より

$$\frac{\sqrt{2}}{48}a^3 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times r$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

問 4

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{\mathrm{OA}}) = 0$$

より

$$
\begin{aligned}
(1,\ -2,\ 0)\cdot(x+2,\ y-1,\ z-5) &= 0 \\
(x+2)-2(y-1) &= 0 \\
x-2y+4 &= 0
\end{aligned}
$$

問 5

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

問 6 $n=1$ のとき $a_1=2$，$n=2$ のとき $a_2=4$，$n=3$ のとき $a_3=7$ より階差数列になっている。

$$
\begin{aligned}
b_n &= n+1 \\
b_1 &= 2 \\
a_{n+1} &= a_n+b_n
\end{aligned}
$$

より，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\
&= 2+\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1) \\
&= \frac{1}{2}(n^2+n+2)
\end{aligned}
$$

$n=1$ のときも成り立つ。

問 7　(1)　1, 2 回目のどちらかで A が 1 回勝つので

$$\left\{{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{5}{6}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)\right\}\times\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{108}$$

(2)　3 回目までに 3 人が 1 回ずつ勝ち，4 回目で A が優勝するのは

$$\left\{3!\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)\right\}\times\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{36}$$

2 回目で A が優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

A が 5 回目以上で優勝すると仮定すると，1〜3 回目で B または C が 2 回勝ってしまい優勝することになるため矛盾する。よって A が優勝する確率は

$$\frac{1}{36}\times 2+\frac{5}{108}=\frac{11}{108}$$

問 8

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1(e^x+ax)^2dx\\
&=\int_0^1(e^{2x}+a^2x^2+2axe^x)dx\\
&=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{3}a^2x^2\right]_0^1+2a\int_0^1 xe^x dx\\
&=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}+2a\left[xe^x\right]_0^1-2a\int_0^1 e^x dx\\
&=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}a^2+2ae-2a\left[e^x\right]_0^1\\
&=\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}a^2+2a
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(e^2-1)+\frac{1}{3}a^2+2a=f(a)$ とすると

$$f'(a)=\frac{2}{3}a+2=0$$

$$a=-3$$

増減表をかくと $a=-3$ のとき，I は最小値をとる。$a=-3$ を代入するとその最小値は $I=\dfrac{e^2-7}{2}$ と求まる。