

令和5年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述

数学

(15:30-17:00)

注意事項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は、手を上げて申し出て下さい。
3. 問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 教科書、ノートなどは一切参照してはいけません。
6. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り、カバンにしまってください。
7. その他、監督者の指示に従って下さい。

数学

問1 以下の方程式の解を求めなさい。

(1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(2) $|x^2 - 4x| - 4 = 0$

(3) $\cos 2x + \sin x = 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$

(4) $\log_2 x + \log_4 \frac{1}{x} = 2$

問2 関数 $f(x)$ を $f(x) = e^{-x}$ とする。

(1) 点 $(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式を求めなさい。

(2) 点 $(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸, y 軸の交点をそれぞれ点 P, Q とし, 原点を O とする。三角形 OPQ の面積 $S(a)$ を求めなさい。ただし, 点 P, Q が原点と一致するときは $S(a) = 0$ とする。

(3) a を横軸, $S(a)$ を縦軸にとって, $S(a)$ のグラフの概形を描きなさい。ただし, グラフ中に極値および切片を明記すること。グラフの凹凸は調べなくてもよい。また, 自然数 n について $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^n e^{-z} = 0$ となることを証明せずに用いてよい。

問3 次の定積分を計算しなさい。ただし, a, b は定数とする。

(1) $\int_a^b (x-a)^3(x-b) dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx$

(3) $\int_0^1 xe^{-2x} dx$

問4 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2 \end{cases}$$

問5 3点 A, B, C の座標をそれぞれ $(1, a, 0), (a, 0, 1), (0, 1, a)$ とし, 原点を O とする。
ただし a は $0 < a < 1$ を満たす正の定数である。

- (1) $\angle AOB$ の大きさを θ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めなさい。
- (2) 直線 AB が yz 平面と交わる点 P の座標を求めなさい。
- (3) 原点 O から平面 ABC に降ろした垂線と平面 ABC の交点 Q の座標を求めなさい。

問6 次の方程式を満たす複素数 z をすべて求めなさい。

$$z^4 = -4$$

問7 n 個のサイコロを振ったときに出た目の数の和を X とする。

- (1) $X = n$ となる確率を求めなさい。
- (2) $X = n + 1$ となる確率を求めなさい。
- (3) $X = n + 2$ となる確率を求めなさい。