令和５年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述　物理　課題I, II

解答例

解答例：課題 I

出題の意図

本問題は，半円上を動く小球の運動を調べる力学の問題です。高校の物理でもこうした運動の一部を学びますが，本問題ではそこから少し進んで，振幅が大きくなるときに周期は単振動からどのように変わるか，摩擦があるときに振動はどうなるかを考えます。高校の微積分が理解できていれば，指示に従い順次解答できるように出題されています。この問題により，運動方程式を中心とした力学の基本的な考え方や関連する数理能力，大学に入って教科書を読み進めることができるか等の能力を問います。

問 1 図を描いて射影を考えることで，次式が求まる。

$$
\begin{aligned}
(v_1 &= v_x \cdot \cos\theta - v_y \cdot \sin\theta) && (1) \\
v_2 &= v_x \cdot \sin\theta + v_y \cdot \cos\theta && (2)
\end{aligned}
$$

加速度も同様で，次式が求まる。

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_x \cdot \cos\theta - a_y \cdot \sin\theta && (3) \\
a_2 &= a_x \cdot \sin\theta + a_y \cdot \cos\theta && (4)
\end{aligned}
$$

問 2 (ア) 与えられた式を t で 1 回および 2 回微分することにより，次式が求まる。

$$
\begin{aligned}
(v_x &= R\theta' \cdot \cos\theta) && (5) \\
v_y &= -R\theta' \cdot \sin\theta && (6) \\
a_x &= R\theta'' \cdot \cos\theta - R\theta'^2 \cdot \sin\theta && (7) \\
a_y &= -R\theta'' \cdot \sin\theta - R\theta'^2 \cdot \cos\theta && (8)
\end{aligned}
$$

(イ) 上の (ア) の答を問 1 の答に代入すると，

$$
\begin{aligned}
v_1 &= R\theta' && (9) \\
v_2 &= 0 && (10) \\
a_1 &= R\theta'' && (11) \\
a_2 &= -R(\theta')^2 && (12)
\end{aligned}
$$

が得られる。

(ウ) 左辺は ma_1，ma_2 で，上の (イ) の加速度を代入したもの。右辺の第 1 項は重力の円周に沿った方向及び円周に垂直な方向への射影，第 2 項は垂直抗力。こう

して問題文の式 (1)，(2) を得る。

問 3 近似して，

$$\theta'' = -\frac{g}{R}\theta \tag{13}$$

を得る。これは単振動なので，$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ とすると，

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{14}$$

また，

$$\theta(t) = \theta_0\ \cos(\omega t) \tag{15}$$

を得る。

問 4 (ア) 問 3 の答を代入して，次式が求まる。

$$|\theta'| = |-\omega\theta_0\sin(\omega t)| = \omega\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \tag{16}$$

(イ) (ア) の答を問題文の式 (3) に代入して，

$$T(\theta_0) = 4\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\omega\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} \mathrm{d}\theta \tag{17}$$

を得る。ここで $\theta = \theta_0 \sin\psi$ と変数変換すると，

$$T(\theta_0) = \frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\theta_0\cos\psi}\theta_0\cos\psi\mathrm{d}\psi = \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \tag{18}$$

と，問 3 と同じ答になっている。

問 5 (ア) エネルギー保存：

$$\frac{m}{2}(R\theta')^2 - mgR\ \cos\theta = 0 - mgR\ \cos\theta_0 \tag{19}$$

から，

$$(\theta')^2 = \frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{20}$$

故に，次式が求まる。

$$|\theta'| = \sqrt{\frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{21}$$

(イ) (ア) の答を問題文の式 (3) に代入して，

$$T(\theta_0) = 4\int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{R}{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,\mathrm{d}\theta \tag{22}$$

半角に直して，次式が求まる。

$$T(\theta_0) = 4\int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{R}{4g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}}}\,\mathrm{d}\theta \tag{23}$$

(ウ) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{\theta_0}{2}\cdot\sin\phi$ のように $\theta \to \phi$ と変数変換すると，

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi \tag{24}$$

を得る。故に，空欄に入る式は $\boxed{\sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\cdot\sin^2\phi}$ 。

(エ) $\sin\dfrac{\theta_0+\delta}{2} > \sin\dfrac{\theta_0}{2}$ なので，

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\theta_0+\delta}{2}\cdot\sin^2\phi}} > \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\dfrac{\theta_0}{2}\cdot\sin^2\phi}} \tag{25}$$

を得る。故に $T(\theta_0+\delta) > T(\theta_0)$ となり単調増加。

(オ) $4\sqrt{\dfrac{R}{g}} = \dfrac{2}{\pi}T_0$ なので，$T(\theta_0)$ の上限は，

$$T(\theta_0 = \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}T_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\cdot\sin^2\phi}} \tag{26}$$

ここで，$\phi \neq \dfrac{\pi}{2}$ で 被積分関数 $< \sqrt{2}$ なので，$T(\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}) < \dfrac{2}{\pi}T_0\cdot\sqrt{2}\dfrac{\pi}{2} = \sqrt{2}T_0$ となる。

(カ) 例えば，ϕ の積分を，$\phi = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$ で $\dfrac{\pi}{6}$ 幅の 3 領域に区切ると，それぞれの領域で被積分関数は定数 $\sqrt{\dfrac{8}{7}}, \sqrt{\dfrac{8}{5}}, \sqrt{2}$ で押さえられ，$< \dfrac{1}{3}\left\{\sqrt{\dfrac{8}{7}} + \sqrt{\dfrac{8}{5}} + \sqrt{2}\right\}T_0 \fallingdotseq 1.25T_0$ と範囲が絞られる。（楕円関数値表を見ると上限は $\leqq 1.18T_0$ ぐらいになる）

問 6 抗力 N は，問題文の式 (2) より $N = mR(\theta')^2 + mg\cos\theta > 0$。これを代入して，運

動方程式は，$\theta' > 0$ なら，

$$mR\theta'' = -mg\sin\theta - \mu\left[mR(\theta')^2 + mg\cos\theta\right] \tag{27}$$

となり，$\theta' < 0$ なら，動摩擦力の符号を変えて，

$$mR\theta'' = -mg\sin\theta + \mu\left[mR(\theta')^2 + mg\cos\theta\right] \tag{28}$$

を得る。

問 7 (ア) 初めは時計方向に動き $\theta' < 0$ なので，方程式を近似すると，

$$mR\theta'' = -mg\theta + \mu mg \tag{29}$$

つまり，

$$\theta'' = -\omega^2(\theta - \mu) \tag{30}$$

を得る。これは $\theta = \mu$ 中心の単振動。振幅は $\theta_0 - \mu$ なので，

$$\theta_1 = \mu - (\theta_0 - \mu) = -\theta_0 + 2\mu \tag{31}$$

で速度が 0 になる。

(イ) 今度は反時計方向で $\theta' > 0$ なので，方程式を近似すると，

$$mR\theta'' = -mg\theta - \mu mg \tag{32}$$

つまり，

$$\theta'' = -\omega^2(\theta + \mu) \tag{33}$$

を得る。これは $\theta = -\mu$ 中心の単振動。振幅は $-\mu - \theta_1 = \theta_0 - 3\mu$ なので，

$$\theta_2 = -\mu + (\theta_0 - 3\mu) = \theta_0 - 4\mu \tag{34}$$

で速度が 0 になる。

(ウ) 以上のように，振動は $\theta = \pm\mu$ 中心に交互におきるが，各振動の振動数は ω と変わらない。故に，$t_{2M} = 2M \cdot \dfrac{T_0}{2} = MT_0$。また，一回振動するごとに速度が 0 になる位置は，4μ ずつ $\theta = 0$ に近づく。ところで静止摩擦力が重力の接線方向成分以上となる条件は，$mg\sin\theta \leqq \mu_0 \cdot mg\cos\theta$，つまり $\mu_0 \geqq \tan\theta$，逆に小さい条件は不等号が逆。これから，$|\tan\theta_{2M-1}| > \mu_0 \geqq \tan\theta_{2M}$ なら良い。θ_{2M}

等は小さいので $\tan\theta_{2M} \fallingdotseq \theta_{2M}$ 等を代入すると，

$$\theta_0 - 4M\mu + 2\mu > \mu_0 \geqq \theta_0 - 4M\mu \tag{35}$$

となる。

問 8 (ア) 初期条件（$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で $\theta' = 0$）から，$C = -Be^{-\mu\pi}$。問題文の式 (5) を微分して

$$2\theta'\theta'' = \theta'(-A\sin\theta + B\cos\theta + 2\mu Ce^{2\mu\theta}) \tag{36}$$

両辺を θ' で割り，θ'' に問 6 の運動方程式を，$(\theta')^2$ に問題の式を代入して，θ の恒等式として両辺を比較することで，

$$\begin{aligned} A &= \frac{2g}{R}\cdot\frac{1-2\mu^2}{4\mu^2+1} && (37) \\ B &= \frac{2g}{R}\cdot\frac{3\mu}{4\mu^2+1} && (38) \\ C &= -\frac{2g}{R}\cdot\frac{3\mu}{4\mu^2+1}e^{-\mu\pi} && (39) \end{aligned}$$

と求まる。

(イ) $\theta = 0$ で $v = 0$，つまり $\theta' = 0$ なので，(ア) の答を用いると

$$0 = (\theta')^2 = \frac{2g}{R}\cdot\frac{(1-2\mu^2) - 3\mu\cdot e^{-\mu\pi}}{4\mu^2+1} \tag{40}$$

つまり，

$$1 - 2\mu^2 = 3\mu\cdot e^{-\mu\pi} \tag{41}$$

が求める方程式。

(ウ) 電卓で (イ) の答の左右の式を数値で計算し，比較すれば，概数値は $\mu \fallingdotseq 0.6$ (図 1, 図 2)。

μ	$1-2\mu^2$	$3\mu e^{-3.14\mu}$	
0.1	0.98	0.2192	
0.2	0.92	0.3202	
0.3	0.82	0.3509	
0.4	0.68	0.3417	
0.5	0.5	0.3121	
0.6	0.28	0.2736	★
0.7	0.02	0.2332	
0.8	-0.28	0.1947	
0.9	-0.62	0.1600	
1	-1	0.1298	

μ	$1-2\mu^2$	$3\mu e^{-3.14\mu}$
0.58	0.3272	0.2816
0.59	0.3038	0.2776
0.6	0.28	0.2736
0.61	0.2558	0.2695
0.62	0.2312	0.2655
0.63	0.2062	0.2614

図 1: 問 8(イ) の答の方程式の左・右辺の各 μ での値。$\mu \fallingdotseq 0.6$ で両辺が近い値になる。

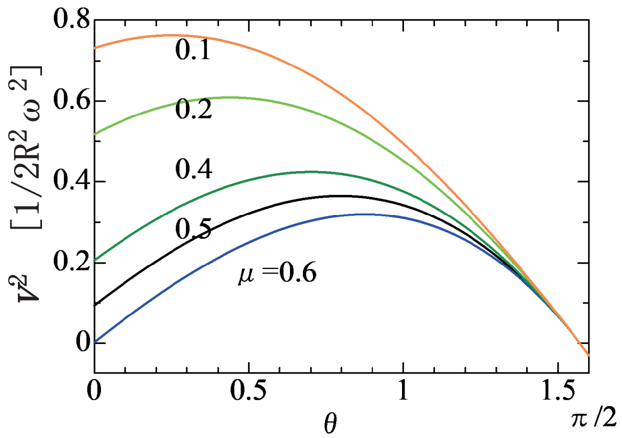

図 2: 様々な動摩擦係数 μ に対する，角度 θ における小球の速度の 2 乗 v^2（$2R^2\omega^2$ を単位として)。問題文の式 (5) をグラフにしたもの。 $\mu \fallingdotseq 0.6$ で $\theta = 0$ に止まることが分かる。

補足

- $\theta'(t)$ を θ の関数 $\theta'(\theta)$ と見ると，$\dfrac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(\theta')^2}{\mathrm{d}\theta}$ なので，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}(\theta')^2}{\mathrm{d}\theta} - 2\mu(\theta')^2 = -\omega^2(\sin\theta - \mu\cos\theta) \tag{42}$$

となり，これは $(\theta')^2$ の非斉次１階微分方程式なので定数変化法で積分でき，初期条件を θ_0 で $(\theta_0')^2$ とすると，解は

$$\begin{aligned}(\theta')^2 &= \frac{2\omega^2}{4\mu^2+1}\{(1-2\mu^2)\cos\theta + 3\mu\sin\theta - e^{-2\mu\theta_0}((1-2\mu^2)\cos\theta_0 + 3\mu\sin\theta_0)\cdot e^{2\mu\theta}\} \\ &\quad +(\theta_0')^2 e^{-2\mu\theta_0}\cdot e^{2\mu\theta}\end{aligned} \tag{43}$$

となる。 ここに $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ で $\theta_0' = 0$ を代入したのが問題文の式 (5)。

- 問題文の式 (5) には３つの定数がある。１階微分方程式で初期条件から C が決まる。非斉次項による特解は独立な２つの関数 $\sin\theta, \cos\theta$ を含むので，それぞれの項を比較することで，２つの定数 A, B も決めることができた。

- エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2(\theta) - mgR\cos\theta = 0 - mgR\cos\theta_0 + W \tag{44}$$

ここで W は小球が針金にした摩擦の仕事 (エネルギー) で,

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \mu(mg\cos\psi + m\frac{v^2(\psi)}{R})\,R\mathrm{d}\psi \tag{45}$$

となる。ここで $V^2(\theta) \equiv \dfrac{v^2(\theta)}{gR}$ とおくと，この式は

$$V^2(\theta) = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) + \mu\int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{d}\psi\{\cos\psi + V^2(\psi)\} \tag{46}$$

の積分方程式となる。ここで，μ が小さいとして，μ に対し 0 次の $V^2(\theta) = 2(\cos\theta - \cos\theta_0)$ を積分内に代入して積分すると,

$$V^2(\theta) = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) + 3\mu(\sin\theta - \sin\theta_0) - 2\mu(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 \tag{47}$$

となる。ちなみに，この式は，式 (43) を $\theta_0' = 0$ として μ で１次まで展開しても得られる。止まる位置を $\theta_1 = -\theta_0 + \varepsilon$（ただし ε は μ の order で小さい）とし，$V(\theta_1) = 0$

なので，上式を ε の１次までで展開すると，

$$\varepsilon = \mu(6 - \frac{4\theta_0 \cos\theta_0}{\sin\theta_0}) \tag{48}$$

となる。θ_0 が小さいときは $\varepsilon \fallingdotseq 2\mu$ となり問 7(ア) の答となる。一方，問 8 のように θ_0 が $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ と大きいときは，$\varepsilon \fallingdotseq 6\mu$ となり，振幅の減衰幅は θ_0 が大きくなるにつれて大きくなることが分かる。このように，振幅の減衰幅は，摩擦によるエネルギーを考えても導き出せるが，計算は運動方程式から考えるよりも少し複雑である。

解答例：課題 II

出題の意図

気体の性質についての理解度ならびに，指数関数や微積分に関する習熟度を試す問題になっています。最後の設問では身の回りの気象や水の性質を科学的な目で捉える力を試しています。

問 1 問題に与えられた条件より空気の平均分子量は

$$M = 28.0 \times 0.800 + 32.0 \times 0.200 = 28.8 \tag{1}$$

である。ここで用いた分子量 M は 1 モル当たりの質量を g 単位で測った数値であるため，kg を質量の単位とする SI 単位系では 1 g $= 10^{-3}$ kg に換算して計算しなくてはならない。この解答例では $\tilde{M} = 10^{-3}M$ kg/mol を用い，数式が煩雑となるのを防ぐ。乾燥空気の場合，$\tilde{M} = 2.88 \times 10^{-2}$ kg/mol である。

理想気体の状態方程式を利用すると乾燥空気の密度は

$$\rho_0 = \frac{n\tilde{M}}{V} = \frac{\tilde{M}P_0}{RT_0} = 1.16 \text{ kg/m}^3 \tag{2}$$

のように求められる。

問 2 単位体積あたりの分子数はヘリウムガスも同じであることに注意すると，

$$\frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_0} = \frac{4.00}{28.8} = 0.139 \tag{3}$$

ヘリウムガスの入った風船が強く浮き上がるのはこのためである。

問 3

$$\rho_0 + \Delta\rho = \frac{\tilde{M}P}{RT} = \rho_0\left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right)\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{-1} \tag{4}$$

なので，与えられた近似式を用いると

$$\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta P}{P_0} - \frac{\Delta T}{T_0} \tag{5}$$

が得られる。

問 4 気体の圧力は分子の数に比例する。従って湿ったモル数 n の空気に含まれる水蒸気

のモル数 $n_{\mathrm{H_2O}}$ は

$$n_{\mathrm{H_2O}} = \frac{\phi P_{\mathrm{v,max(T)}}}{P} n \tag{6}$$

となる。従って湿った空気の平均分子量は

$$M' = 28.8 + (18.0 - 28.8)\, \frac{\phi P_{v,\mathrm{max}}(T)}{P} \tag{7}$$

と表すことができる。整理すると

$$\alpha\,(P, T) = -10.8 \frac{P_{v,\mathrm{max}}(T)}{P} \tag{8}$$

と表すことができる。指示された圧力と温度での値は以下の通りである。

$$\alpha = \begin{cases} -2.06 \times 10^{-1} & (T = 290.0\ \mathrm{K}) \\ -3.80 \times 10^{-1} & (T = 300.0\ \mathrm{K}) \\ -6.69 \times 10^{-1} & (T = 310.0\ \mathrm{K}) \end{cases} \tag{9}$$

問 5 湿っている場合は平均分子量が 28.8 から前問の式で表される形に変わることを利用すると

$$\beta(P, T) = \frac{\alpha(P, T)}{28.8} = -0.375 \frac{P_{\mathrm{v,max}}(T)}{P} \tag{10}$$

であることが分かる。数値を代入すると

$$\beta = \begin{cases} -7.16 \times 10^{-3} & (T = 290.0\ \mathrm{K}) \\ -1.32 \times 10^{-2} & (T = 300.0\ \mathrm{K}) \\ -2.32 \times 10^{-2} & (T = 310.0\ \mathrm{K}) \end{cases} \tag{11}$$

となる。

問 6 箱に上向きに働く力は $P(z_0)S$ である。下向きに働く力は $P(z)S$ と重力である。箱の中にある空気の質量は

$$m = S \int_{z_0}^{z} \rho(z')dz' \tag{12}$$

であることを考えると力の釣り合いから

$$P(z_0)S = P(z)S + gS \int_{z_0}^{z} \rho(z')dz' \tag{13}$$

が得られる。この式の両辺を S で割り，移項すると問題文に与えられた条件 (5) が

求まる。

問 7 問 6 で与えられた式 (5) の両辺を z で微分すると

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{14}$$

が得られる。これに $\rho = n\tilde{M}/V$ と理想気体の状態方程式を代入すると

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\tilde{M}Pg}{RT} \tag{15}$$

が得られる。両辺を P で割ると，

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = \frac{d}{dz}\log\left[\frac{P(z)}{P(0)}\right] = -\frac{\tilde{M}g}{RT} = -\frac{1}{\lambda} \tag{16}$$

が得られる。温度 $T = T_0 = 300.0$ K の場合，$\lambda = 8.83 \times 10^3$ m となる。

問 8 温度が高さにより変化する場合，前問で求めた方程式は

$$\frac{d}{dz}\log\left[\frac{P(z)}{P(0)}\right] = -\frac{\tilde{M}g}{RT(z)} = -\frac{\tilde{M}g}{R\left[T(0) - \eta z\right]} \tag{17}$$

と書き換えることができる。左辺と右辺を $z = 0$ から積分すると

$$\log\left[\frac{P(z)}{P(0)}\right] = \frac{\tilde{M}g}{\eta R}\log\left[1 - \frac{\eta z}{T(0)}\right] \tag{18}$$

が得られる。整理すると

$$P = P(0)\left[1 - \frac{\eta z}{T(0)}\right]^{\tilde{M}g/(\eta R)} \tag{19}$$

が得られる。密度は

$$\rho = \frac{\tilde{M}P}{RT} = \rho(0)\left[1 - \frac{\eta z}{T(0)}\right]^{\tilde{M}g/(\eta R)-1} \tag{20}$$

数値を代入すると $z = 3000$ m での圧力は $0.70451\,P(0)$，密度は $0.74948\,\rho(0)$ となるので，密度は $z = 0$ での値の 74.9 %である。

問 9 前問で求めた式 (20) を近似すると，

$$\rho(z) = \rho(0)\left[1 - \left(\frac{\tilde{M}g}{R} - \eta\right)\frac{z}{T(0)}\right] \tag{21}$$

が得られるので，

$$\lambda' \;=\; T(0)\left(\frac{\tilde{M}g}{R}-\eta\right)^{-1} \;=\; 1.0728\times 10^4\ \mathrm{m} \tag{22}$$

が得られる。有効数字 3 桁にすると $\lambda' = 1.07\times 10^4$ m となる。ただし問 10 で λ との差を計算する際には 1.073×10^4 m として計算した方が良い。

問 10 2 原子分子である空気では定積比熱は $C_V = (5/2)R$，定圧比熱は $C_P = (7/2)R$ でその比は $C_P/C_V = 7/5$ である。このため，断熱的に膨張すると，その圧力と体積は

$$PV^{7/5} \;=\; \text{一定} \tag{23}$$

に従って変化する。ここで ρV も一定に保たれることに注意すると，密度は

$$\rho \;\propto\; P^{5/7} \propto \left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^{5/7} \tag{24}$$

に従って，高さとともに減少してゆく。問 3 で求めた温度の上昇による密度変化も考慮すると上昇する空気の密度は

$$\begin{aligned} \rho(z) \;&=\; \rho(0)\left[1+\frac{\Delta T}{T(0)}\right]^{-1}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^{5/7} && (25)\\ &\fallingdotseq\; \rho(0)\left[1-\frac{\Delta T}{T(0)}-\frac{5}{7}\frac{z}{\lambda}\right] && (26)\end{aligned}$$

により表される。問 9 の式 (9) を用いると，周囲の大気と密度が等しくなる条件

$$\frac{\Delta T}{T(0)}+\frac{5}{7}\frac{h}{\lambda} \;=\; \frac{h}{\lambda'} \tag{27}$$

が得られる。整理すると

$$h \;=\; \left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{5}{7\lambda}\right)^{-1}\frac{\Delta T}{T(0)} = \left(\frac{2}{7}\frac{\tilde{M}g}{R}-\eta\right)^{-1}\Delta T \;=\; 2.70\times 10^2\left(\frac{\Delta T}{1\ \mathrm{K}}\right)\ \mathrm{m} \tag{28}$$

が得られる。

問 11 湿度による密度変化は

$$\Delta\rho' \;=\; \beta\Delta\phi\rho(0) \tag{29}$$

と表すことができる。上昇による密度変化は乾燥空気と同じとして良いので，上昇

する湿った空気の密度は

$$\rho(z) \fallingdotseq \rho(0)\left(1+\beta\Delta\phi-\frac{5}{7}\frac{z}{\lambda}\right) \tag{30}$$

と変化する。周囲と同じ密度になるのは

$$h' = -\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{5}{7\lambda}\right)^{-1}\beta\Delta\phi \tag{31}$$

である。数値を代入すると $h'=107$ m が得られる。

問 12 問 11 で求めた数式に高さ $z=0$ での温度 310.0 K を用いて計算すると，$h'=194$ m と 300.0 K の時よりずいぶん高くなる。湿度の変化は $\Delta\phi=0.100$ で同じでも，温度が高くなると飽和水蒸気圧が高くなり，密度の変化が大きくなるためである。

問 13 水蒸気が水滴になると，空気の平均分子量が大きくなる。湿った空気 1 モルの中の水蒸気 Δx モルが乾燥空気と置き換わることにより分子量は

$$\Delta M = (28.8-18.0)\,\Delta x \tag{32}$$

だけ変化する (問 4 の答)。圧力と温度が変化しないなら，個数密度も変化しないので，密度変化と平均分子量の変化は等しくなる。

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\Delta M}{M} = 0.375\,\Delta x \tag{33}$$

しかし凝縮熱が加わることにより

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{C_P} = \frac{2\Delta Q}{7R} = 1.51\times10^3\,\Delta x\ \mathrm{K} \tag{34}$$

だけ温度が上昇する。この温度上昇による密度変化は問 3 より

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -5.04\,\Delta x \tag{35}$$

となる。温度上昇による密度低下の方が，凝縮による密度増加を上回る。したがって飽和水蒸気圧に達したのちも，水蒸気の一部が水滴に変わりながら密度が下がり上昇を続ける。

この問題では温度変化を定圧比熱で論じるべきであるが，定積比熱 $C_V=(5/2)R$ を用いても結論は変わらないので大きな減点にはしない。

問 14 問 10 で用いた断熱変化の式に理想気体の状態方程式 $PV=nRT$ を代入して V を消

去すると，

$$PV^{7/5} = P^{-2/5}(nRT)^{7/5} = 一定 \tag{36}$$

が得られる。従って断熱変化している気体の圧力と温度の間には

$$T(0) = T(3.00 \times 10^3 \text{ m})\left[\frac{P(0)}{P(3.00 \times 10^3 \text{ m})}\right]^{2/7} \tag{37}$$

という関係式が成り立つ。これに数値を代入すると $T(0) = 312$ K が得られる。これは 39 °C と高温である。

問 15 たとえば次のような事柄を論じることを期待している。

– 夏，太陽により暖められた空気が上昇するのは，単に温度が高くなるだけでなく，湿気を含みやすくなるからである。温度上昇による密度変化より，水分子が空気より軽いことと，水分子が水滴になる際の凝縮熱により温度が上がることが上昇気流を発生させるのに重要である。

– 湿った空気が上昇しやすいのは温度が 30 °C (= 303.15 K) より暑いときである。Tetens の式によれば温度が高くなればなるほど，飽和水蒸気圧が高くなり，空気の絶対湿度が高くなりやすく，密度も乾燥しているときより低くなりやすい。このようなときほど，強い上昇気流が発生しやすい。またその水蒸気が水滴に戻る際の凝縮熱が上昇気流を加速させる要因である。

– 解答例の議論を進めると，高山の気圧の低いところではより低温で水が沸騰することや，圧力釜では高い温度で煮えることを理解できる。たとえば問 8 で考えた高さ 3×10^3 m での気圧と飽和蒸気圧が等しくなる ($P_{\mathrm{v,max}} = 7 \times 10^4$ Pa) のは 90 °C というように沸点を求めることができる。

– 高さによる温度の低下率 $\eta = 6.00 \times 10^{-3}$ K/m は適当な値になるように調節されているらしい。もしこれより急激に温度が下がるなら，一度暖められた空気は途中で止まることなく上昇を続ける。しかし温度勾配がずっと緩いと，蒸発熱を考えても上昇流は起こらなくなる。上昇流がなくなると，大気の循環はずっと遅くなり，現在とは全く異なる気象になるだろう。