第8回数理科学コンクール課題

1. 4つの課題を用意しました. いくつの課題に解答してもかまいません. また, 1つの課題にいくつ解答してもかまいません. 例えば, 実験をして見つけた解答と, 実験をせずに考えた解答との2つの解答を提出してもかまいません. むしろ2種類以上の解答を歓迎します. その場合にはどうして答えが2つ以上になったかも説明してください.
2. グループで参加した諸君は, 1つの課題に1つの解答でも, また, 複数の解答でもかまいません. たとえば, 協力して解答を考えたけれども, 途中から別々の結論を思いついた場合には, それぞれの参加者が別々に解答してもかまいません. その場合, 1つの解答を一緒に提出する参加者の名前を, 解答用紙に記入してください. たとえば, A さん, B さん, C さん3人のグループで, A さんとBさんが1つの解答を, C さんが1人で, 別の解答を用意した場合には, A さん, B さんが用意した解答用紙には, グループ番号, A さんB さん2人の名前と参加番号を, もう1つのC さんの解答用紙にはグループ番号, C さんだけの名前と参加者番号を記入してください.
3. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません. ただし, 異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください. また, 1つの課題に1つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください. 1つの課題に2つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください.
4. 課題に関する質問は監督者に質問してください. どんな質問でもどしどし質問してください.
5. 5階のH-52講義室と5階のフロアーには解答を考えるための実験用の道具, 教材, 機器が用意してあります. 何を使っても構いません. 工具の利用法は監督者に相談してください.

平成17年7月23日 千葉大学先進科学教育センター

課題 1

1.1

二次方程式

$$x^2 - x + 10^{-12} = 0$$

のより正確な解を電卓を用いて計算する方法を考察してください. 解の公式を用いても構いません.

ただし a が零でないとき

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの答えを

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

によって求める式を解の公式といいます.

1.2

ある数 A の平方根（2 乗すると A になる数, $\sqrt{A}$）を電卓の四則演算のみを用いて計算する方法を以下に説明します. この方法で求めた数値が A の平方根の近似値を与えることを説明してください.

A の平方根の近似値の計算法

1. A の平方根の値を適当に推測します (これは値が近かろうが, 程遠かろうが構いません). その数値を a_0 とします.
2. A を a_0 で割った数と a_0 の平均値を計算します. この数値を a_1 とします.
3. A を a_1 で割った数と a_1 の平均値を計算します. この数値を a_2 とします.
4. 次々と, この処理を続けて, a_{n+1} と a_n との値が変化しなくなるまで続けます.

ただし, a_n は n 回目に計算される結果です.

1.3

平方根の近似値の計算法を参考にある数 A の n 乗根（その数を n 回かけると A になる数, $\sqrt[n]{A}$）を求める方法を説明しなさい. また, 実際に適当な数値（自由に選んでください）の 3 乗根, 4 乗根, 5 乗根などを計算し, 正しく計算できていることを示すこと

できるだけ, 少ない計算回数で求まる方法を工夫すること.

課題 2

図 1(a) に示すように川に N 本の橋が架かっているとします. もし, N 本の橋がどれも確率 p で通れないとするとき, $p \leq 1 - \frac{1}{N}$ であれば平均的に見てどれか 1 本の橋は通れて, 川を渡ることができます. しかし, $p > 1 - \frac{1}{N}$ の時には平均的には渡れない可能性があります. このことは以下のように説明できます.

橋の数 N と, 平均的に橋を通れない確率 p との積 $N \times p$ は通れない橋の数の期待値 (平均的に通れそうにない橋の数) を表します. したがって, $p \leq 1 - \frac{1}{N}$ であれば,

$$N \times p \leq N - 1$$

より, 通れない橋の期待値は $(N-1)$ 以下になり, 少なくとも 1 つ通れそうな橋があることがわかります. したがって, 橋を通って側を渡れることになります.

同様に, $p > 1 - \frac{1}{N}$ の場合, 通れない橋の数の期待値は

$$N \times p > N - 1$$

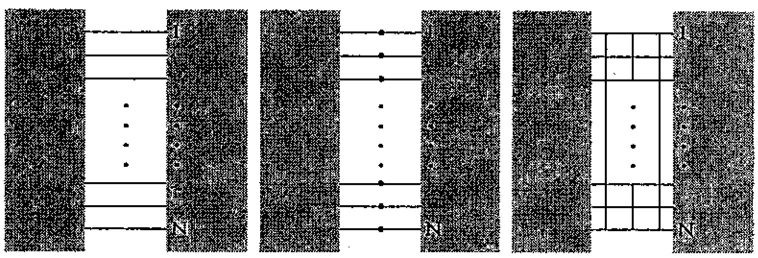
となり N が整数であることから, $N \times p \geq N$ となり, 通れない橋が N あることになり, その結果, 通れる橋がまったくないことになります.

もし, 図 1(b) のように N 箇所の橋がそれぞれ 2 つの橋で構成されていると, 橋の数は全部で $2N$ になります. この $2N$ 本の橋がそれぞれ確率 p で渡れないとすると, どこか一箇所が渡れると期待できるためには $p \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$ でなければなりません.

では, 図 1(c) に示すように橋が碁盤の目のようになっている場合, それぞれの橋が渡れない確率が p のとき, 少なくとも 1 つの経路を通って川を渡れるためには確率 p どのような条件を満たせばいいのか考察してください. 特に, 碁盤の目の縦横の数によりどのように変わるのか, 小さなものから考えていきましょう.

また, 橋が碁盤の目のようではなく, 三角形の格子になっている場合はどうか?

方眼紙, 三角グラフ用紙を用意しているので必要ならば用いて考察してください.



(a) (b) (c)

図 1: 橋の配置

課題 3

良く飛ぶブーメランを作るにはどうすればよいか考えてください．ブーメランにはいろいろな形のものがあります．3 枚羽のブーメランのキットが用意してあります．このキットを使って考えてください．

課題 4

数が碁盤の目の上に並んだ表を行列といいます. 特に, 数が 0 か 1 かのどちらかである行列を 2 値行列といいます. 下に行列の例と, 2 値行列の例を示します

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & -4 & 8 \\ 20 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

さて, 以下では 2 値行列, つまり, 0 と 1 とが碁盤の目の上に並んでいる場合を考えます.

行列の, 水平の数の並びを行, 垂直の列の並びを列と呼びます.

2 値行列の列の順を左から数えて, 行の順を上から数えて 1 行目, 2 行目, 3 行目, 4 行目, 5 行目の 1 の個数は, 2, 1, 2, 2, 1, です. また 1 列目, 2 列目, 3 列目, 4 列目の 1 の個数は, 3, 2, 2, 2, です. このような数を, それぞれ 2 値行列の, 行和, 列和と呼びます. 行列が与えられれば, 行和, 列和を計算することが出来ることは明らかです.

では逆に, 2 値行列の行和, 列和が与えられたときに, つまり, 各行, 各列の 1 の個数が与えられた場合に逆に 2 値行列を決めることができるでしょうか. つまり, 0 と 1 との位置を完全に決めることができるでしょうか.

出来ないなら, なぜ出来なくなるのか. 出来るのなら, どんなときにどうしたら元の行列を決めることが出来るのか考えてください.

ここでは, 行列の列や行の数は有限の個数に限ることにします. 小さな大きさの行列から例を作って試してみてください.