第９回数理科学コンクール課題解説

平成18年11月3日 千葉大学先進科学研究教育センター

目次

はじめに 2

優秀者氏名 4

1 課題1 **7**

課題 7

解説 7

講評 9

2 課題2 **11**

課題 11

解説 11

講評 12

3 課題3 **13**

課題 13

解説 13

講評 13

4 課題4 **14**

課題 14

解説 14

講評 14

はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 9 回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

   試験時間は 6 時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.

2. たのしい物理・数学の発見

   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.

4. 人材の育成

   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去 8 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 9 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後，科学する心を磨き続け，我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します．今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています．千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です．物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています．課題作成者もさらに研鑽をかさね，おもしろく，しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます．

課題作成者

千葉大学教授　　井宮　淳
千葉大学助教授　植田　毅
(五十音順)

平成 18 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 18 年 7 月 23 日に開催しました第 9 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第 9 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞　岩瀬優也
　　　　グループ 9 諸橋優祐 佐藤浩喜 藤岡真哉
　　　　グループ 11 武石健太 田中純 平向拓哉 山中樹人
銀欅賞　中西泰裕
　　　　篠塚仁貴
　　　　加賀俊生
　　　　工藤遼太郎
　　　　グループ 2 君塚正隆 三上翔平 大屋 厚 川崎悦道 吉岡勇樹
　　　　グループ 12 雨車和意 大蛤良義将 佐藤彰紘
　　　　グループ 13 指田朝郎 加島佑一 寺西智信
学長賞　小松由梨果
　　　　鈴木優太郎

課題	参加者名
1	岩瀬優也
	中西泰裕
	工藤遼太郎
2	グループ 2 君塚正隆 三上翔平 大屋 厚 川崎悦道 吉岡勇樹
	グループ 9 諸橋優祐 佐藤浩喜 藤岡真哉
3	鈴木優太郎
	グループ 11 武石健太 田中純 平向拓哉 山中樹人
4	岩瀬優也
	小松由梨果
	篠塚仁貴
	加賀俊生
	グループ 9 諸橋優祐 佐藤浩喜 藤岡真哉
	グループ 11 武石健太 田中純 平向拓哉 山中樹人
	グループ 12 雨車和憲 大姶良義将 佐藤彰紘
	グループ 13 指田朝郎 加島佑一 寺西智信

千葉大学先進科学研究教育センター長
教授 上野信雄
平成 18 年 11 月 3 日

1　課題1

課題

雨音はショパンの調べといわれますが, 雨だれも屋根からリズミカルに落ちることを見ることができます. また, 水道の蛇口をしっかり閉めておかなかったとき, 蛇口から水滴がポタポタ落ちることを見ることができます.

この水滴が滴下するときにはどのような法則があるのでしょうか?

特に,

1. 滴下の流量 (水滴の質量) と滴下の時間間隔.

2. あるときの時間間隔と次の時間間隔.

に注意してみよましょう. また, 液体の性質によってどのように変化するかも検討してください.

実験は水道の蛇口が少ないので注射器を用意しました. 一定に素敵を滴下する方法などは各自工夫してください. また, 流量は電子天秤を用意してありますから. 工夫して測定してください. 液体については, ジュース (ブドウ糖, 果糖を含む清涼飲料水) とアルコールの水溶液を用意しましたので, 特にアルコールの取り扱いはインストラクターの指導に従って使ってください.

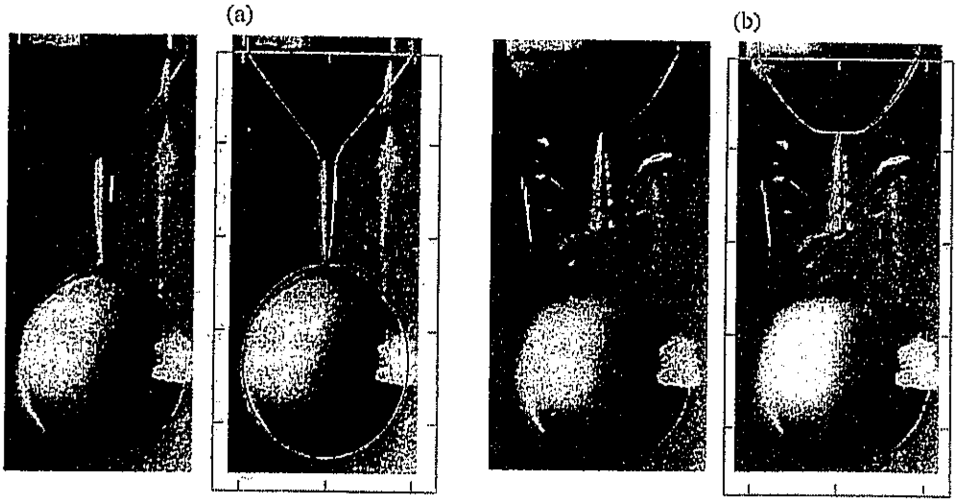
解説

この課題は, 日常の何気ない現象でも科学の対象になりうることを理解してもらおうと思い出題しました. 身近なところにも科学的に興味深い現象はいくつもあります. それをそう捉えられるかどうかは現象を観察する目によります. スーパーカミオカンデなど巨額を投資し, 高度な実験装置を用いなくても重要な科学現象を発見, 解明できることを理解してください.

さて, 課題の液滴滴下現象ですが, 日常的な現象です. しかし, 物理的には2つの点で難しい問題になります. 第1には, 一般に流体力学は理論的には非線形偏微分方程式で記述され, 解くのが難しく, また, 様々な現象が見られます. これは, 天気予報には大気の運動をスーパーコンピューターを用いて解析していますが, 的中率が問題になることにも現れています. さらに, 滴下現象では, 液体の粘性と表面張力とが支配的で理論的記述は難しくなります. 第2には, 連続的な液体の流れではなく, 「ちぎれる」つまり表面が分離することが取り扱いを難しくします (図1).

この課題では, 滴下の時間間隔に注目してどのような法則があるかを発見してもらうことを期待していました. 一見等間隔で規則的に思える水滴の落下時間間隔は, コックの開き具合によりきわめて複雑な揺らぎを示します. この問題が, 水滴の変形の様子, ちぎれる瞬間の高速度写真などにより観測され, コンピュータシミュレーションを用いて理論的にも理解されるようになったのは1990年代以降のことです (図2).

「複雑な揺らぎ」というのはカオス現象のことです. これは, カオス現象が気象 (つまり, 流体) のコンピューターシミュレーションで発見されたこと無関係ではありません. 水滴落下のリズムがカオスの兆候を示すことは, 1984年にShaw等によって最初に実験で確かめられました. 彼等は水滴の (n 番目の)



水滴がちぎれる様子の数値シミュレーション（青い線）と実験の写真 (Peregrine, *et al.*: J. Fluid Mech. 212 (1990) 25. Cambridge University Press の許可を得て転載）との比較．蛇口の半径はどちらも 5.2 mm ($a=0.952$)．数値シミュレーションの流速は $v_0=0.01$．(a) 水滴がちぎれる直前の比較．(b) (a) の直後に発生した小さな水滴（サテライト）がちぎれる直前の比較．

図 1:

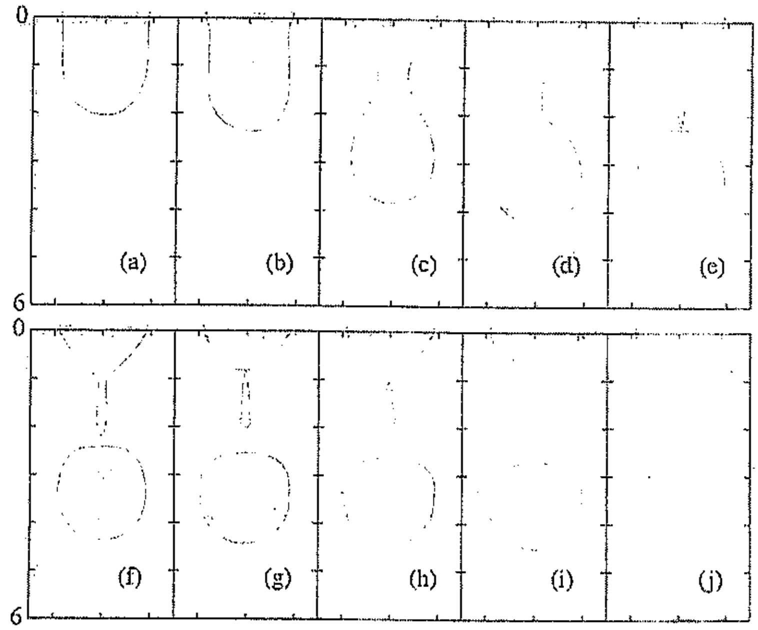
落下時間間隔 T_n の時系列を測定し，流量に応じて T_n がほとんど一定値を保ったり (1 周期)，2 つの（あるいは 4 つの）異なる値が繰り返し現れたり (2 周期あるいは 4 周期)，全く不規則であったりすることを確かめました (図 3)．

T_n を横軸，T_{n+1} を縦軸にグラフにしたものを再帰写像と言いますが，これを見ることにより時系列の乱雑さが確率論的 (ランダム) であるか，決定論的 (背後になんらかの力学的関係がある)，つまりカオス的であるかが分かります．Shaw 等は．ある流量の範囲において再帰写像がはっきりした構造（カオス的アトラクター）を見出し，水滴落下間隔に見られる不規則性はカオスであることを示しました (図 4)．

Shaw 等の実験以来，多くの研究者が落下時間間隔を観測する実験を行い，「周期倍分岐」，「Hopf 分岐」，「間欠性」，「クライシス」，「ヒステリシス」などの多様な非線形現象を示すことが明らかになっています．近年もより精密な実験 (例えば，オーストラリアでは流体にアスファルトを用い，1 年に数度の滴下条件下での高精度実験を行っています)，流量の広範囲にわたる観測が行われ現象の全体像を明らかにする研究がなされています．また，数値シミュレーションでは水滴の変形の様子だけでなく，長時間の挙動についても実験を非常によく再現する研究がなされました．これにより，このカオス現象が本質的には水滴自身の 1 次元的な（1 方向の）振動と，流入とちぎれによる質量の振動という 2 つの振動の結合によって生じていることが明らかになっています．

しかし，

- 蛇口の大きさが異なる場合，
- 流量が非常に大きくなった場合



蛇口半径 $a=0.916$ (2.5 mm), 流速 $v_0=0.01$ において水滴がちぎれる様子のシミュレーション結果. (a) $t=0.00$; 初期条件の平衡解. (b) $t=16.05$; 静的な臨界質量に達した瞬間. (c) $t=23.30$. (d) $t=23.82$. (e) $t=23.86$; ちぎれる瞬間. (f) $t=23.90$. (g) $t=23.95$; サテライトのちぎれる瞬間. (h) $t=23.98$. (i) $t=24.03$. (j) $t=24.18$. (b) から (j) までに要する時間は 0.14 秒と非常に短い.

図 2:

の研究はまだこれからの課題として残ったままなのです.

講評

実験が水圧が一定でないビュレットを使ったこともあり, 水量が減少するに従って滴下間隔が長くなるという結果を見出した人, グループが多かったようです. この現象を考察し, ビュレット内の水量が減少すると水圧が小さくなるからという結論を得た答案もありました. また, 水道でも実験をし, 水道では圧力が一定なので間隔が一定になるとの結論を得ている例もありました.

ビュレットによる現象は大学 1, 2 年生で習うベルヌーイの定理で理解できます. ベルヌーイの定理とは流体における力学的エネルギー保存則で, 流体の密度を ρ, 圧力を p, 速度を v, 流体の高さを h とすると,

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = \text{一定}$$

と書けます. ただし, g は重力加速度です.

これを用いると図 5 のように水槽の下端に開いた孔から流れ出る流体の速さは

$$v = \sqrt{2gh}$$

と与えられます．この性質をトリチュリの原理といいます．このことにより，ビュレットから流れ出る液体の速さ (滴下間隔) が液体の高さの平方根に比例することが予想されます．上述の実験，考察はこれに近い状態を確認したものと言えます．

流体の流れには力学的な力が支配的な場合と，粘性や表面張力が支配的な場合とがあります．ベルヌーイの定理が成り立つ場合はあまり粘性，表面張力が問題にならないです．他方，滴下実験では表面張力，粘性が支配的領域であろうと考えられます．このような条件にするためには，ビュレットのコックを閉めて滴下を非常にゆっくりにする必要があります．このようにすれば，ほぼ一定の滴下間隔が実現でき，滴下間隔の揺らぎについての考察ができたものと思われます．参加者の皆さんの実験ではコックの開きが大きく，滴下速度が速かったように思われます．

参考文献・画像出典

清野 健，勝山智男，水滴落下のカオス，日本物理学会誌，Vol. 55, No. 4, 2000.

2 課題2

課題

容器に入ったミルクの上面にミルクを1滴垂らすと，きれいな王冠状になることがあります (図6). これをミルククラウン現象と言います．王冠は中心部からの波の伝達が不安定な液体の増幅が原因で起こると言われています．ミルククラウン現象は，牛乳に限らず粘度のある液体で条件が揃えば起こります．

どのような条件でミルククラウンができるのかと言う問題は第一線の科学者達もチャレンジしている課題です．

落下させる [滴] の距離 (高さ), 質量, 体積, 比重, 落下スピード, 表面張力, 容器の液体の深さ等の条件を変えて，どのような場合にミルククラウン現象が起こるのか条件を見つけてください．

解説

これも非常に身近な現象です．この何気ない現象を科学的に記述するには系統的な測定が必要です．その現象においてどのようなパラメータ（変数）が重要かを見抜いて，それらの変化により現象がどのように変化していくかを，いかに系統だって観測，測定できるかを見るために出題しました．

ミルククラウンも滴下実験同様，液体の粘性，表面張力が支配する現象です．粘性，表面張力が支配的な領域での流体力学は様々な興味深い現象が見られますが，取り扱いが難しく，それほど解明されていません．ミルククラウン現象についても，現象を連続的に記録するには高速度カメラなどの高価な機材が必要となり，液滴の衝突速度などのパラメータを変えるような系統的な研究はほとんど行われてこなかったのです．最近でも，2003年日本流体力学会和文機関誌「ながれ」に京都大学，東京大学のグループによる論文が掲載されています．

http://www.nagare.or.jp/mm/2003/gunji/index_ja.htm
を参照してください．この問題は未だに，研究対象の現象なのです．

この現象は液滴を薄い流体層に衝突させることが重要なポイントです．つまり，落下した液滴が反射して飛び散る現象と言えるでしょう．

京大，東大のグループによる研究では，クラウンの形成に影響を与えるパラメータとして，液滴の衝突速度．液滴が衝突する流体層の深さ，および作業流体の粘性に注目し，標準実験からこれらのパラメータを1つずつ変化させ，そのパラメータに対する依存性を調べています．

この研究の標準実験は

液滴を落下させる高さ	40cm
液滴が衝突する流体層の深さ	1mm
作業流体の粘性	1.72 cSt (牛乳)

というパラメータを用いています．

この研究では以下のような現象が見られています (図7).

- 液体の粘性を大きくして，グリセリン溶液（粘性：44.1cSt）を用いた場合，クラウンは頂点での波状形状が見られなくなる.

- 液体をそのままに．衝突速度を速くすると．初期に高さの高い筒状の上に飛沫状のクラウンが見られるが，直ぐにクラウンは崩壊する.

- 液滴が衝突する流体層の深さを変化させ，9mm となると高さが小さく，頂上が若干波打ったクラウンが見られ，直ぐに消滅，鋭い水柱が見られる.

詳しいことが知りたい場合には，上記 HP で全ての実験データ (画像) が見られますので参照してください.

講評

この実験は現象が起こる時間が非常に短いので難しかったかと思いますが，いろいろな試みがありました．形もよく観察できていたように思われます．それでも，全体に液滴が衝突する液体層が深すぎる傾向がありました．これは，予想外に浅いところでミルククラウン現象が見られたということでしょうか．蜂蜜など粘性を変えた実験も行ったグループもありましたが，残念ながら実験結果が系統的に整理されていた例は少なかったように思われます.

参考文献・画像出典

郡司博史，石井秀樹，斉藤亜矢，酒井敏，ミルククラウンに関する研究，ながれマルチメディア，2003.

3　課題3

課題

ロケットは, ロケット燃料を燃焼して飛行します. ロケット燃料が燃焼すれば, ロケット全体の質量は減少します. したがって, ロケットは飛行中に自体の質量を消費しています. ロケット燃料の消費のしかたと, 飛行距離との関係について考えてください.

ロケットを飛ばすことはできませんので, ロケットカーのキットを用意しました.

解説

実際のロケットは徐々に燃料を燃焼させるために, ロケット本体の重量と燃料の重量との和は時間の関数となります. しかし, 近似的に瞬時に噴射が終わると考えることができます. すると, 運動量保存の法則で初速度と燃料との関係を求めることができます. ロケット本体の質量を M, 噴射燃料 (水) の質量を m とし, 燃料の噴射速度を v ロケットの初速度を V とすれば,

$$\{(M+m)-m\}V = mv$$

なる関係式が成立します. したがって,

$$V = \frac{m}{M}v$$

となります. さらに, 近似的に燃料の噴射速度はロケットの中の空気の圧力 p に比例すると考えることができます. ポンプを押した回数を n とすれば,

$$v = k \times p = c \times n$$

となり結果として, ロケットの初速はポンプを押した回数に比例します.

次に, 初速と走行距離との関係を考えてみます. 道路の摩擦 μ とし, 空気による抵抗を無視し, 走行距離を x とすれば, エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}MV^2 = \mu g M x$$

なる関係が成立します. したがって,

$$x = K \times V^2 = C \times n^2$$

を得ます. しかし, 水があまり多くなると瞬時に噴射できなくなります. したがって, この関係は, 水の量が少ない場合だけ成立します. また, ポンプを押す回数にも限度があります.

この課題では, ポンプを押す回数 n と走行距離との関係を導き出すことを想定しました.

講評

逆にロケットを作って，その構造から，燃料噴射のモデル化を考え，解説のような単純なモデル化を導くことを想定したいました．しかし，参加者の多くは，ロケットを作り，走行させることに興味を持っていました．いろいろと実験をしていました．実験の計画を立て，実験法と実験結果を評価する姿勢は科学の基本です．そこで，実験の計画，まとめ方を評価対象にしました．

4　課題 4

課題

画面の中に．穴のある小さなドーナツと，穴のない団子とが多数映っています．ドーナツと団子の個数を求める方法を考えてください．ただし，画像を撮像するとき焦点がぼけるとドーナツの穴が見えなくなることを考慮してください．この場合は団子の個数を計数する問題になります．

解説

この課題は，顕微鏡下での赤血球と白血球との数の数え上げに関する初期の研究結果からヒントを得た課題です．顕微鏡下では，赤血球と白血球とは，その構造の違いから，円板とドーナツのように見えます．ただし，解像度が悪いと共に円板のように見えます．

境界から，物体の中に向かって削り取りを進めると，円板は点に，ドーナッツは閉曲線になります．これを二次元物体の骨格といいます．画像の中の物体の骨格を抽出する計算を骨格化と呼びます．このことから，画像に骨格化を施したあとの，点の個数が円板の個数が閉曲線の個数がドーナツの個数となります．点はさらに収縮させると、画面から消えてしまいます．従った、画面の中の塊を収縮させて，残った閉曲線がドーナツに対応しています．

ある物体が背景から分離して見えるのは境界があるからです．円板が n こあれば，境界の数は n 個です．しかし，n 個のドーナツの境界は $2n$ 個です．

そこで，解像度の良いドーナツが見える画像の境界の数を a，解像度を悪くしてぼかして円板しか見えない画像の境界の数を b とします．このとき，円板の数を p，ドーナツの数を q とすれば，

$$p + q = a,\ \ p + 2q = b$$

なる関係が成立します．したがって，

$$p = 2a - b,\ \ q = b - a$$

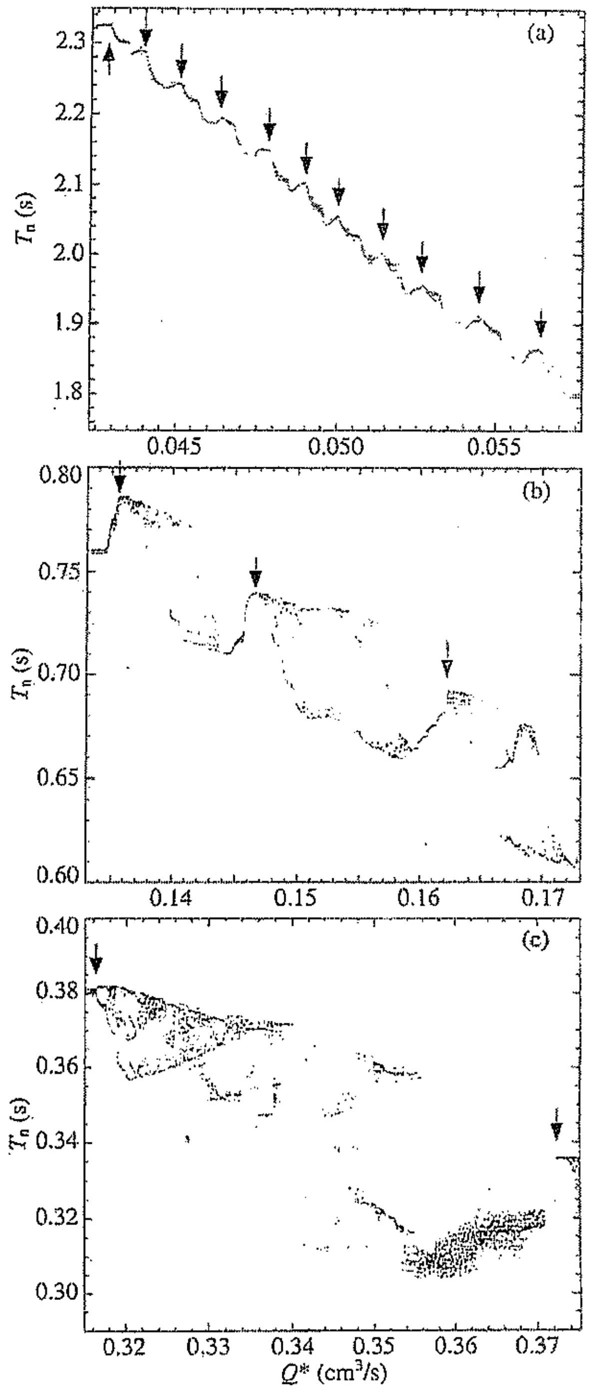
なる関係を得ます．以上のような解像度を変えて画像から種々の情報を取得する方法は，多重解像度解析と呼ばれます．また，画像中の穴の数を数えることは位相幾何学の基礎です．

医学の分野，特に病理学で　顕微鏡写真などから統計的な方法や位相幾何学を使って，病理学診断に有用な情報を得る方法をステレオロジーと呼びます．画像から有用な情報を取り出すためには，現代数学の種々の方法が利用されます．

講評

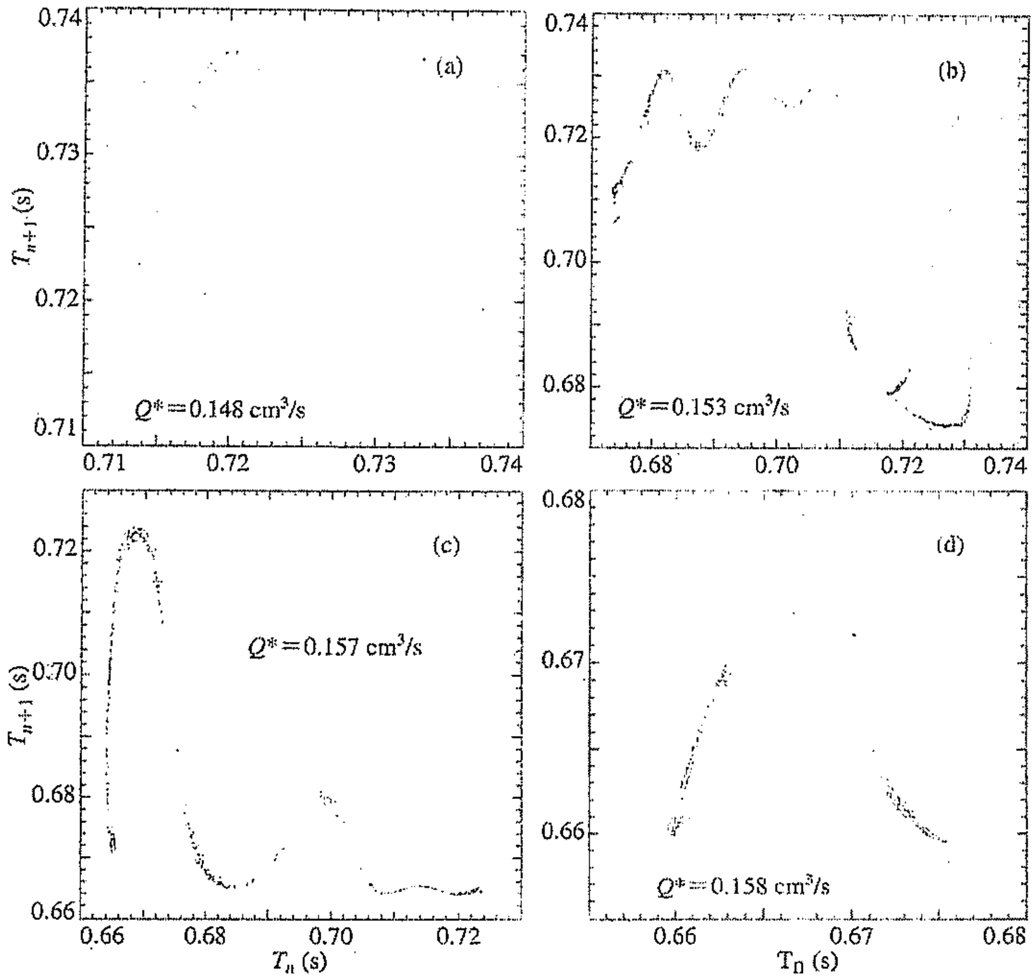
位相幾何学は理学部や工学部の大学２－３年生で初めて習う分野です．今年，フィールズ賞の対象となった，ペレルマンが解いたポアンカレ予想解決のに関する研究は３次元の物体に関して「穴のあるなし」を分類することに関係する問題です．

位相幾何学の基本のひとつは，有りうる状態をすべて記述し，それを分類し，性質を導くことです．そこで，状態の数え上げを評価しました．



流量 Q^* をパラメタとした落下間隔 T_n の分岐図. (a) $0.043\,\mathrm{cm^3/s} < Q^* < 0.057\,\mathrm{cm^3/s}$. (b) $0.133\,\mathrm{cm^3/s} < Q^* < 0.173\,\mathrm{cm^3/s}$. (c) $0.315\,\mathrm{cm^3/s} < Q^* < 0.375\,\mathrm{cm^3/s}$. 測定は流量を増加させながら行った. 矢印はユニットの境界を示す. ここでは安定状態 (1 周期) からカオス状態へ移る点を基準とした. (文献 15) より転載.)

図 3:



落下間隔 T_n の再帰写像の例．図 1 の中央のユニット内でカオス状態の 4 つの流量を選んだ．

図 4:

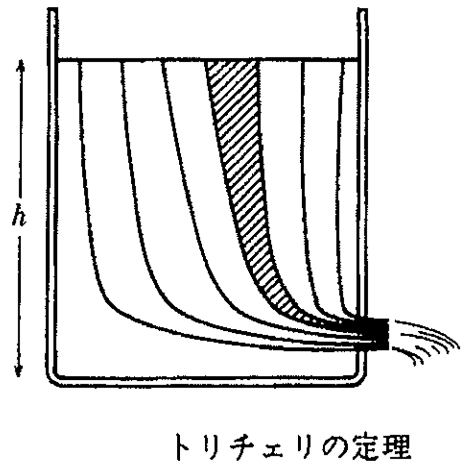


図 5:

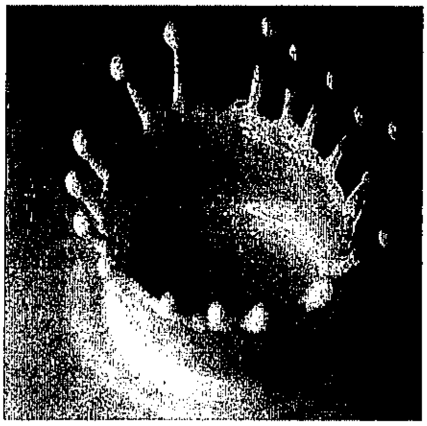


図 6: ミルククラウン現象

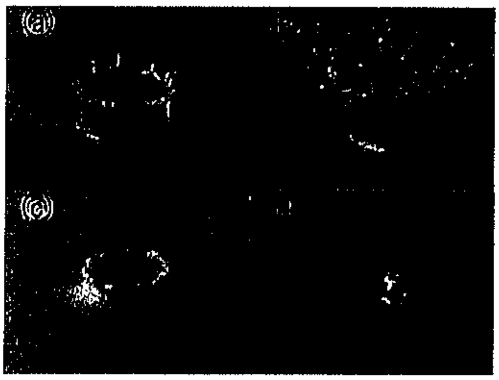


図 7: ミルククラウンの典型例: (a) 標準実験, (b) 液滴の衝突速度が大きい場合, (c) 液滴が衝突する流体層が深い場合, (d) 作業流体の粘性が非常に大きい場合.