第 11 回数理科学コンクール課題解説

平成 20 年 11 月 3 日 千葉大学先進科学センター

目次

第 11 回数理科学コンクール課題解説

平成 20 年 11 月 3 日 千葉大学先進科学センター

はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 10 回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

   試験時間は 6 時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.

2. たのしい物理・数学の発見

   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.

4. 人材の育成

   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去 10 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 11 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後，科学する心を磨き続け，我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します．今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています．千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です．物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています．課題作成者もさらに研鑽をかさね，おもしろく，しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます．

課題作成者

千葉大学教授　　井宮　淳
千葉大学准教授　植田　毅
(五十音順)

平成 20 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 20 年 7 月 27 日に開催しました第 11 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第 11 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞	**水野僚介**
	深尾靖明
	グループ 6 阿部一貴 池上怜央奈 笈川侑也 橘ゆう 山越智佳
	グループ 12 佐藤天哉 高橋雄司 高橋長春 関口俊
	グループ 16 石井真由美 指田瑛美莉 浦愛美
銀欅賞	**小松玉麻果**
	菅本知望
	武野瑞紀
	新堀恭平
	杉浦茉理
	熊切俊祐
	河合祐輔
	グループ 7 齊藤彩音 海老原美紅 三好由理 大場智美 堀桃子
	グループ 11 指田朝紀 石崎雅人 柿谷彬
学長賞	**安長理紗**
	戸田里花
	グループ 13 岡崎孔明 小川卓馬 坂上和紀 程田裕介

課題　参加者名

1　杉浦茉理

グループ 6 阿部一貴 池上怜央奈 笈川侑也 橘ゆう 山越智佳

グループ 7 齊藤彩音 海老原美紅 三好由理 大場智美 堀桃子

2　菅本知望

グループ 12　佐藤天哉 高橋雄司 高橋長春 関口俊

グループ 13 岡崎孔明 小川卓馬 坂上和紀 程田裕介

3　水野僚介

深尾靖明

戸田里花

熊切俊祐

グループ 6 阿部一貴 池上怜央奈 笈川侑也 橘ゆう 山越智佳

グループ 13 岡崎孔明 小川卓馬 坂上和紀 程田裕介

グループ 16 石井真由美 指田瑛美莉 浦愛美

4　水野僚介

小松玉麻果

武野瑞紀

安長理紗

深尾靖明

新堀恭平

河合祐輔

グループ 6 阿部一貴 池上怜央奈 笈川侑也 橘ゆう 山越智佳

グループ 11 指田朝紀 石崎雅人 柿谷彬

グループ 12　佐藤天哉 高橋雄司 高橋長春 関口俊

グループ 13 岡崎孔明 小川卓馬 坂上和紀 程田裕介

グループ 16 石井真由美 指田瑛美莉 浦愛美

千葉大学先進科学センター長

教授 上野信雄

平成 19 年 11 月 3 日

1　課題 1

課題

伝導性のある（電気を通す）ガラス板（普通のガラスに酸化スズをコーティングしてあります）２枚とある種の塗料とある種の色素を含む水溶液（果汁など）を用いると簡単に太陽電池を作ることができます.

作製手順は以下の通りです（詳細は別途配布します）.

- 伝導性のあるガラス板を２枚用意する.
- 一枚の電気を通す側一面に鉛筆（黒鉛）を塗る.
- もう一枚のガラスの電気を通す側にある種の塗料を塗る.
- 塗料を高温で硬く乾かす.
- 塗料を塗ったガラスをある種の色素を含んだ水溶液（果汁など）に浸す.
- 塗料に色素が十分染み込ませた後に乾燥させる.
- ２枚の電気を通す側を内側にして合わせ, クリップで留める.
- ガラスの隙間に電解質（ヨード溶液）を垂らす.
- ガラスを光に当てた状態で２枚のガラスの間の電位差を測定する.

さて,

1. どのような塗料, どのような色素を用いるともっとも太陽電池として性能がよいものができるでしょうか.
2. 太陽電池を製作する場合に塗料にどのような条件が必要でしょうか.
3. ガラスの塗料を塗った部分の面積を増減させるとどうなるでしょうか.

について, 実験しながら考察してください. 実験については解答開始後, 詳細を説明します. 実験では指導教員, 大学院生, 大学生の指示に従ってください.

解説

この課題は, 最近, サイエンスイベント, 理科実験教室などでよく採用されている色素増感太陽電池を作ってもらいました. ただ, 作って動いたというだけでは面白くないので, どういう材料で作れば最も効率的な電池になるかを試してもらいことにしました.

従来の太陽電池は半導体であるシリコンでできています. 青色 LED の発明が話題になり, 信号や自動車のヘッドライトにも用いられるようになって馴染み深くなった LED は電気を流すことにより光を放ちます. 大雑把に言うとシリコンでできた太陽電池は LED の逆のことをやっていることになります. しかし, LED の発光効率に比べ, 太陽電池の発電効率はまだまだ改善の余地があります.

さて, 色素増感太陽電池は, 従来の太陽電池とは全く異なる自然模倣型の発電機構で動作しています. 植物が行っている光合成の明反応において色素であるクロロフィルが光を吸収し, そのエネルギーを用いて電子を取り出し, 放出するという工程と同じ原理です. クロロフィルと似た構造を持つ色素が光を吸収し, 色素から電子が飛び出して, それがチタニア（二酸化チタン）半導体光電極に注入され, 対極に移動するというのが色素増感太陽電池の発電機構です. 詳しいことは, 別に配布した東京出版「中学への算数」2001 年 10 月号の記事を参考にしてください.

色素増感太陽電池については, 1991 年にスイスのローザンヌ工科大学のグレッツェル教授らが, 新しい色素増感太陽電池（グレッツェル・セル）を開発し, それまで 1% 以下であったエネルギー変換効率を, 10 % 近くまで飛躍的に進歩させました. その後の研究にもかかわらず, 変換効率はそれほど上がっていないのが現状らしいですが, 変換効率が 15 % になれば, 現在のシリコン製の太陽電池よりもかなり安価に電力を供給できるようになるとのことです. 実用化には, 耐久性の問題が残っています. 2 万時間の連続照射に耐える耐久性の確保が実用化の課題です. 実用化に向け, 非常に薄いオールプラスチック製太陽電池を印刷で作る技術開発も研究されています.

さて, 実験に関してですが, 導電性ガラスに塗布するものはチタニアを含んだものでなければなりません. 当日, 2 つのカップに入っていたものはそれぞれ小麦粉と二酸化チタンパウダーを食酢で溶いたものでした. 非常に粘りがある方が小麦粉です. もちろん, 小麦粉を用いれば電池にはなりません. また, 白い絵の具には二酸化チタンが使われているので白い絵の具を塗った場合は電池になったはずです. 修正液, 白い塗料はほぼ全て二酸化チタンが使われているのでどれを用いても電池にはなったはずです. 逆に言えば, 塗って, 電池になれば, その塗ったものには二酸化チタンが含まれていると言うことになります.

塗料に染み込ませる色素を何にすれば大きな起電力（電圧）が得られるかについては, アントシアニンを多く含む, できるだけフレッシュな（酸化されていない）ジュースを用いると良いとされています. アントシアニンを含む植物としてはクランベリー, ブルーベリー, ブラックベリー, ブドウ, ラズベリー, イチゴなどがあげられます. これまで行った結果では, ザクロ, 赤ジソが大きな起電力しました. 赤ジソには赤色のアントシアニン系色素成分の「シソニン」が含まれています. また, カゴメ株式会社総合研究所は, 9 種のフルーツ（ザクロ, プルーン, ブルーベリー, グレープ, アップル, ピーチ, オレンジ, グレープフルーツ, パインアップル）の内, ザクロが最も強い抗酸化作用（活性酸素を消去する作用）をもっていることを明らかにしています. (http://www.kagome.co.jp/research/summary/030930/) ザクロの水溶性成分の抗酸化作用は, 主に, アントシアニン類（デルフィニジン, シアニジンなど）やタンニン類（エラグ酸, プニカラギンなど）による効果であると考えられています.

また, 小さなガラスの他に, 1 辺 10cm の正方形の伝導性ガラスも用意してありました. 面積が大きくなっても起電力は変わりません. しかし, 流せる電流の容量が面積に比例して大きくなります.

講評

当日は天気が悪く, この実験には不利な状況でした. また, 実験に尻込みしたのか, 時間的余裕がなかったのか, 予想したほどは, この実験にチャレンジした人は居ませんでした. 学校やお家で簡単に実施できる実験ではないので, この実験に限らず, 実験が成功するか, 失敗するか, 内容が理解できるかどうかはおいておいて, できる機会があれば思い切り挑戦してもらいたいと思います.

果敢に，挑戦してくれたグループでも，多くのグループが残念ながら小麦粉や黒の絵の具を選んだりしていました．白い塗料を塗り，ドライヤーで焼き付けているとき，白い塗料が茶色く焦げたようになっていたのは，実は，小麦粉を選んで，焼いたので，クッキーやパンのような状態になっていたのです．黒の絵の具は黒い色が光をよく吸収すると考えたのかもしれません．しかし，この実験の場合，光を吸収するのは色素を含むジュースの方なのです．

ちゃんと起電力が発生したのは３，４組しかありませんでした．起電力を得られなかったグループでも，塗料，色素をどのような組み合わせで実験していくかという実験計画を答案に書いてくれたグループ（個人）がありました． この課題のように，いろいろな可能性がある場合にはどのような組み合わせで実験を行っていくかの計画を立てることが重要になります．そういう意味で，運良く起電力を発生させられたグループ（個人）だけでなく，綿密な実験計画も高く評価しました．

2　課題 2

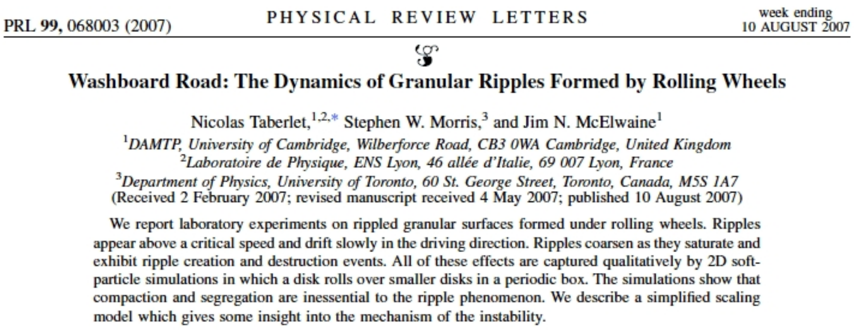
課題

最近はあまりお目にかかれないが, 舗装していない土がむき出しの道路は月のクレーターのように凸凹ができたり, 路面が波打つようにうねったりすることがあります．この凸凹は交通量が多い場合にできやすいと言われています．なぜ, 車などが通ると凸凹ができるのかその理由を物理的に考証してください．ただし, 簡単のために, 道路は均一な土でできていて, 通る車は 1 種類とします.

解説

この課題は非常に身近な現象ですが, 基礎的な非線形物理学の問題です．その身近な現象でさえ不思議な物理があり, 未解明なことがあり, 世界第一線の研究対象になっていることを分かってもらうために出題しました.

この現象を解明した論文がつい最近（2007 年 8 月）, アメリカ物理学会（American Physical Society, APS）が発行する最も権威のある学術誌に掲載されました．ケンブリッジ大学, トロント大学などイギリス,


PRL 99, 068003 (2007)　PHYSICAL REVIEW LETTERS　week ending 10 AUGUST 2007

Washboard Road: The Dynamics of Granular Ripples Formed by Rolling Wheels

Nicolas Taberlet,[1,2,*] Stephen W. Morris,[3] and Jim N. McElwaine[1]

[1]*DAMTP, University of Cambridge, Wilberforce Road, CB3 0WA Cambridge, United Kingdom*
[2]*Laboratoire de Physique, ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69 007 Lyon, France*
[3]*Department of Physics, University of Toronto, 60 St. George Street, Toronto, Canada, M5S 1A7*
(Received 2 February 2007; revised manuscript received 4 May 2007; published 10 August 2007)

We report laboratory experiments on rippled granular surfaces formed under rolling wheels. Ripples appear above a critical speed and drift slowly in the driving direction. Ripples coarsen as they saturate and exhibit ripple creation and destruction events. All of these effects are captured qualitatively by 2D soft-particle simulations in which a disk rolls over smaller disks in a periodic box. The simulations show that compaction and segregation are inessential to the ripple phenomenon. We describe a simplified scaling model which gives some insight into the mechanism of the instability.

図 1: 未舗装の道路が凸凹になる理由を解明した論文

カナダ, フランスの世界トップクラスの大学, 研究所の研究者たちがこの身近な現象を解明するために実験とコンピュータシミュレーションで研究しています． この論文には最も古いものは 1963 年, 新しいものは 2006 年の 11 の参考文献が挙げられていて, 古くからこの問題に取り組んできるけれども決着がついていなかったことが分かります.

この論文の実験では図 1 に示すように, 砂を入れた盥を回転させ, その縁の近くにゴムの車輪を砂の表面に接触させ, 盥の回転した回数と表面の様子を調べています．この論文では小さな円盤を敷き詰めた上を大きな円盤を転がすという模型でコンピュータシミュレーションを行い, 図 2 に示すように, 実験と同様の結果を得ています．実験では, 図 3 のように, 回転数が少ない場合は小さな凸凹が沢山でき, それぞれの凸凹が車輪の進行方向に移動しながら, 互いに結合し, 凸凹の数が少なくなる．このとき, 凸凹の高さ（深さ）は次第に大きくなっていく．図 4 a) から, 図 3 で見たように, 時間とともに 1 つずつ凸凹の数が減っていくこと, 凸凹の振幅（高さ）は時間とともに増加することが分かる．また, b) から凸凹の 1 回転あたりの移動距離は凸凹の数にほぼ比例していることが分かる.

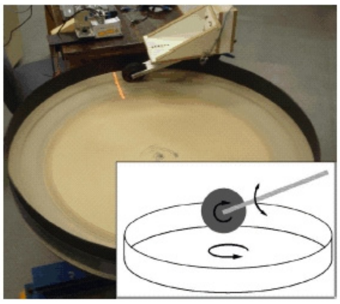


FIG. 1 (color online). Experimental setup. A bed of natural sand is laid on the circumference of a rotating table (1 m in diam and rotation rate between 0.2 and 0.8 Hz). A hard rubber wheel attached to an arm is free to bounce and roll on the granular bed.

図 2: 実験装置

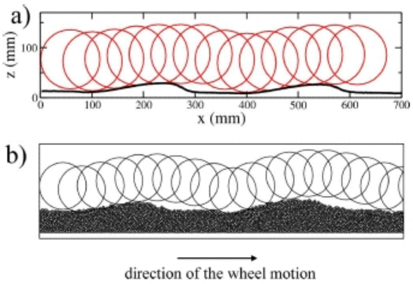


FIG. 2 (color online). Bed profile and wheel trajectory for typical washboard patterns obtained experimentally (a) and numerically (b).

図 3: a) 実験, b) コンピュータシミュレーションでできた「洗濯板」構造

この論文の結論を要約すると, 凸凹の形成には速度の閾値があり, それ以上であれば凸凹ができる. 凸凹は時間とともに数が減り, 深さは深くなる. 砂の圧縮や散らばりには依存しない. この凸凹ができる原因は, 走行中に車輪が上下に揺れることで, 軽い車が速いスピードで走行するほど大きな凸凹ができるらしい.

この現象と似たような現象は身の回りに沢山あります. 金平糖はグラニュー糖を加熱した鍋のに入れ, 回転させながら砂糖水をかけていくと次第に角が形成され, 角があるまま次第に大きくなっていきます. しかし, 金平糖の角の数は大きさが変わっても変化しません. また, 理論的解析が簡単な例としては水の中でゆっくり成長する円柱状の氷は大きさが大きくなっていくと, 図 5 に示すように円周方向に三角関数的な揺らぎが現れ, 軸方向にも周期的な凸凹が現れます. これは Sekerka 不安定性として知られています.

また, 重力中で比重が小さな液体上に比重の大きな液体をそっとおくと（例えば, 油の上に水）, その状態を保てますが, 少しでも擾乱（摂動）が加わるとその界面は急激に波打ち, 上下が入れ替わります. このような現象をレーリー - テーラー不安定性として知られています. これらの共通点はいったん揺らぎ始めるとどんどん揺らぎが大きくなっていく（場合がある）ことです.

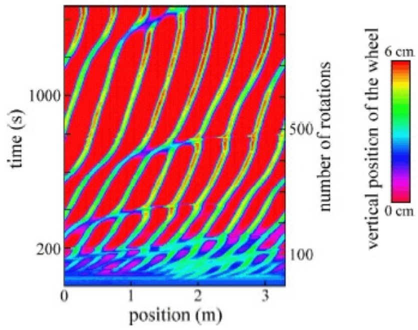


FIG. 3 (color online). An experimental space-time plot of the vertical position of the wheel for $v = 2\ \mathrm{ms}^{-1}$.

図 4: 横軸は円周方向の位置, 縦軸は盥の回転回数（時間）, 色は車輪の高さを表す

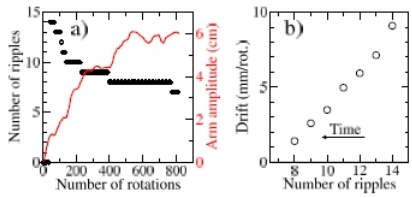


FIG. 4 (color online). Experimental ripple dynamics from Fig. 3. (a) Time evolution of the number of ripples (diamonds) and of the amplitude of the ripples (solid line). (b) Drift velocity in millimeters per rotation, as a function of the number of ripples.

図 5: a) 凸凹の数と高さ（深さ）の時間（回転回数）変化, b) 凸凹の数と凸凹の移動速度の関係

講評

この課題は考え易かったのか, 多くのグループが取り組んでくれました. 小麦粉を平らに撒き, その上を車輪の代わりのものを転がし実験を繰り返して考察していたグループも複数ありました. ナイスチャレンジです.

答案には, 一旦凸凹ができると, 車の上下運動のためにその凸凹が増幅されるという結論に, 実験をして到達したもの, 思考実験で到達したものが複数見られました. このような, 考察を高く評価しました. しかし, 現実には土が締まって, 密度が変化する現象が見られますが, 上の論文の結果によれば, その密度変化は本質的ではなく, 凸凹がほとんど動かない平らな部分の上を移動していくことが重要だということになっています.

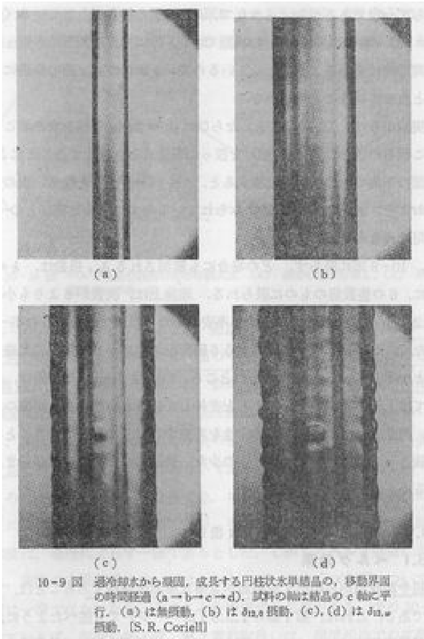


図 6: 円柱状の氷が成長していく様子

3　課題 3

課題

長い導線のどこかが断線しています．つまり, 電気を通さなくなっています．断線している場所を効率よく探す方法を考えてください.

1. 導線を切ってもいい場合, どうすれば効率が良いでしょうか．たとえば, 切る回数をなるべく少なくするにはどうすればよいでしょうか.
2. 導線を切ってはいけない場合はどうでしょうか.

解説

この課題は技術家庭の問題のようですが, 後半で解説するように, 小課題 1 には, 計算機によるシュミレーションで物理現象を解析したり, 新しい現象を予測する計算科学の基本的な手法や, データの検索と関係があります．また, 身近な物理と密接な関係があります．小課題 2 には, 決まった答えがありません．つまり, 物理的に実現可能な制約を考えて, 答えがある問題を作らなければなりません．まず導線の種類を考えなければなりません.

たとえば, 導線の形態として, 被覆線, 裸線があります．さらに, 導線（被覆線の場合は芯線）の素材として, 電気を通す素材であることは当然ですが, 磁気を帯びやすい素材, 反対に磁気を帯びづらい素材を考えることができます．また, 断線部分の発見法として, 導線を切断するなどして破壊する方法, 破壊しない方法, 破壊する場合には, 破壊を最小限にとどめる条件などを考えることができます．以上を表にまとめると表のようになります.

導線の種類	導線 (芯線) の素材	断線部分の検査法
被覆	磁性体	破壊
裸	非磁性体	非破壊

位置は当然, 表の上の行が小課題 1 に対する制約になります. さて, 被覆導線の破壊を許して断線箇所を探す場合, 最小手順は, 導線を半分に切り, 通電しないほうの切れ端を, さらに 2 等分にすることを繰り返します. このとき, 求める精度で, 断線部分を推定できます. しかも, 各ステップで, 通電する部分が残りますから, 残った通電可能な導線を使うことができます. ただし, この手法では, 導線を切り刻むため, 繋ぎ目無く利用できる部分は, 最大長で元の導線の半分にしかりません. しかし, 導線の素材を選ばないことから, 最も常識的で間違いの無い方法と考えることができます.

破壊を伴う断線検査は, 方程式の解を求める 2 分法と呼ばれるアルゴリズムと関係があります. 物理や工学では, 方程式 $f(x) = 0$ の答えを数値でもとめる必要があります. 2 次方程式, 3 次方程式, 4 次方程式には, 四則演算と開平計算（平方根や立方根を求める計算）だけで答えを求める公式があります. 5 次方程式は楕円関数を使えば答えを解析的に求めることができます. しかし, 実際に数値で答えを求める必要がある場合に有効な方法の一つが, 以下に述べる 2 分法です.

関数 $f(x) = 0$ の解は関数 $y = f(x)$ が x 軸を切る点を求める問題に成ります. このとき, 区間 $[a, b]$ において単調（減少するか増加するかどちらかでしかない. ）で, しかも, $f(a)f(b) < 0$ とします. このとき, 中間値の定理

> 区間 $a \leq x \leq b$ において関数 $f(x)$ は連続でかつ a, b において相異なる値 $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ を取るとき, $\alpha < \gamma < \beta$ である任意の値 γ に対して $f(c) = \gamma$ であるような $a < c < b$ を満たす c が少なくとも一つ存在する.

より, 関数 $y = f(x)$ は, x 軸と交わり, しかも単調であることからただ一回交わります. この点を $(x^*, 0)$ $a < x^* < b$ とすると, $f(x^*) = 0$ より, x^* は $a < x^* < b$ を満たす方程式 $f(x) = 0$ の解であることが分かります. この x^* は以下のアルゴリズムで求めることができます. 今, 簡単にするために, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ と仮定します. すなわち, 関数 $y = f(x)$ は, 右上がりのカーブになります.

1. $c = \frac{a+b}{2}$ に対して $f(c) < 0$ であれば, c を新しい a とする. そうでなければ, すなわち $f(c) > 0$ であれば, c を新しい b とする.

2. $|a - b|$ が十分に小さければ, $c = \frac{a+b}{c}$ を x^* とする. そうでなければ, 1 に戻る.

断線箇所の推定と同様に区間 $[a, b]$ を半分の区間 $[a, c)$,$[c, b]$($c = \frac{a+b}{2}$) に分けたどちらの区間に単調な関数 $y = f(x)$ と x 軸との交点があるかを判定することで, 解に十分な精度で近い数値求めることができます. 一歩進めて, $|a - b|$ が十分に小さいとき, 区間 $[a, b]$ を $f(x) = 0$ の解の代用として採用することもできます. このような, 数値の扱い方を区間解析と呼びます. 現代の計算科学では誤差のある数値を表す基本的な手法として重要な手法になっています.

さて, 次に小さい順に並んだ数の列から望みの数がどこにあるか探す問題を考えてみます. 今議論を簡単にするために, 16 個の数

$$\langle 1, 2, 5, 7, 8, 9, 18, 20, 23, 35, 40, 45, 56, 70, 93, 111 \rangle$$

とします．この中から, 70 を見つけることを考えます．$56 = (1(\text{最小値}) + 111(\text{最大値}))/2$ より, 求める値は,

$$\langle 56, 70, 93, 111 \rangle$$

の中にあります．$83 = [(56 + 111)/2]$ より, 求める値は

$$\langle 56, 70 \rangle$$

の中にあります．　さらに $68 = (46 + 70)/2$ より,

$$\langle 70 \rangle$$

となり, 70 が確か見つかります．

$$\begin{aligned}&\langle 1-70, 2-70, 5-70, 7-70, 8-70, 9-70, 18-70, 20-70,\\&23-70, 35-70, 40-70, 45-70, 56-70, 70-70, 93-70, 111-70 \rangle\end{aligned}$$

とすれば,

$$\langle -69, -68, -65, -63, -62, -61, -52, -50, -47, -35, -30, -25, 14, , 0, 23, 41 \rangle$$

より数探しが階段関数に対して二分法を適用していることが分かります．

講評

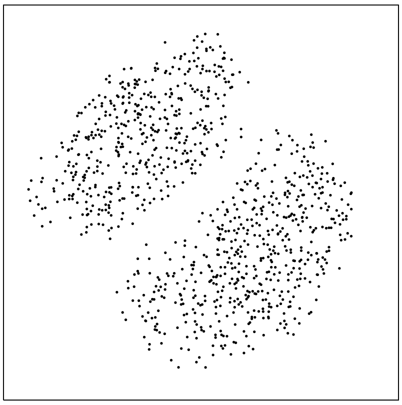
小課題 1 は, 解答した参加者ほとんどが正解していまいした．そこで, 解答のまとめ方を評価の基準にしました．

小課題 2 には皆さん困っていたようです．　伝導性が良いことから導線の芯線導線が磁性体であった場合, その性質を利用して, いろいろなことができます．

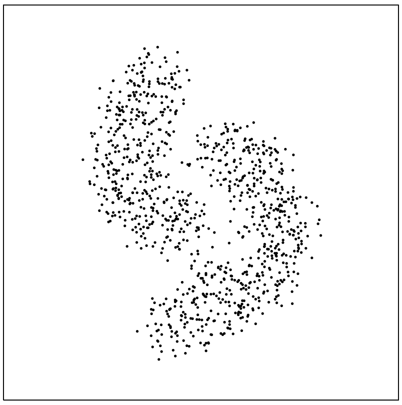
思考実験では

> 磁石を導線の一端をつなぐと, 導線の中の金属は磁気を帯びますが, 断線した箇所から先は磁気を帯びません．そこで, 導線に砂鉄を振り掛けると, 磁化したと部分には砂鉄がつき, そうでない部分, つまり断線した場所から先には砂鉄が着かないことが予想できます．

しかし, 切断箇所の長さが非常に短い場合には, 断線部分から先でも磁化することも考えられますから, 断線部分の欠落の長さによりますが, 磁石を利用して断線部分を探すことができます．



(a)



(b)

図 7: 平面上に分布した点の集合

4　課題 4

課題

図 7 に示すような, 平面の上に分布した点の集合を見てください. どちらの点の集合もなんとなく, 2 つの部分に分かれそうです. それでは,

1. なぜ分かれたように感じるのでしょうか.
2. もし分かれるのであれば, その境界をどのように決めることができるでしょうか.
3. この例は, 2 次元平面に分布する点の集合を考えています. 1,2 で考えた方法は 3 次元の空間に浮かんだ点の集合の性質を考えることにも拡張できるでしょうか. もしそうなら, 2 次元でも 3 次元でも通用する

   「点の集合が分割可能であるかを判定し, 分割可能な場合は分割を実現する方法」

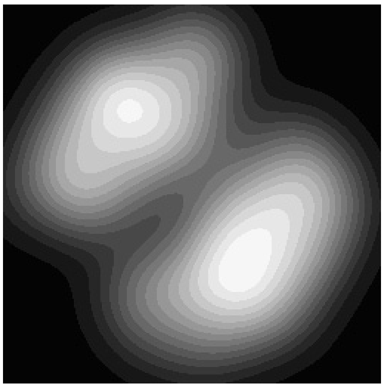
   を考えてください.

解説

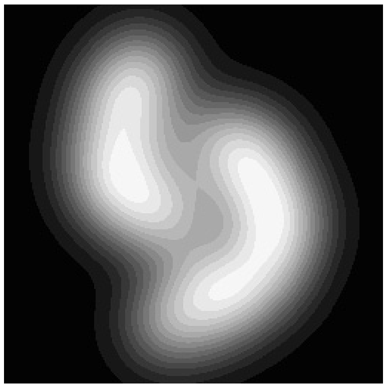
この課題は, 統計的学習理論と呼ばれる人工知能の一分野の問題を 2 次元の平面で表現した問題です. 統計的学習理論には幾つかの課題がありますが, 中心的な問題の一つに, 空間内に分布した点の集合を何らかの尺度で分類できる場合には, 二つ以上の部分集合に分類する問題があります. この問題をクラスタリングと呼びます. したがって, この課題を統計的学習理論の用語で表すと

「2 次元点集合のクラスタリングを行え. 」

となります. 最も基本的な手法は,



(a)



(b)

図 8: 暈かしによる点の集合の変化

「ある点を決めて最も近い点までの距離が，ある長さ以下であれば，それらの二点は同じ集合の要素である．」
と考え，

「同じ集合に属するであろう点を次々に初めの点の属する集合に付加する．」
ことです．ほとんどの解答がこの立場で分類の手法を考えていました．この手法は，点集合の微細構造に着目した手法と考えることができます．

次に点集合の大局構造に基くものを考えます．例の 1 の場合には，うまい直線を見つけると，2 つの集合に分離できます．点分布がこのような分布である場合，集合は線形分離可能といいます．このような性質を見つけた解答もありました．しかし，例の 2 つ目のような場合には直線ではだめで，曲線を決定する必要があります．したがって，集合の非線形分離が問題になります．以上の 2 つの手法が統計的学習理論の基本的な教科書にある手法です．

さて，次に点分布の大局構造と局所構造を同時に考える方法を照会します．点集合を画像と考え，暈かしてみると，点がボケて近い点は一塊のように見えます． どんどんとボカすと最後には一つの図形のようになりますが，その手前で，点集合の分布に応じて，集合を分離できます．暈かし方が，同じ集合に属する点間の距離を決める尺度に相当します．このような，点データの解析法を，尺度空間法と呼びます．尺度空間法は元々，40 年以上前に，文字の自動読み取りのために，当時電気試験所（後の電子技術総合研究所，現在の産業技術総合研究所）の飯島泰蔵博士 (東京工業大学名誉教授，北陸先端科学技術大学院大学) によって確立されました．欧州米国では，1990 年代に再発見されています．

以上の手法の考え方は次元に依存しません．ただし，3 次元の場合には，直線が平面になり，曲線が曲面になります．さらに，一般の次元では多様体によって集合を分割することができます．

さて，各点が半径 r の勢力圏を持っていると考えることにします． このとき，勢力圏に重なりのある点を同じ集合に属する点と考えて，点を中心とする半径 r の円盤で平面を埋めていくと，距離 r 以下の位置にある点が 1 つのまとまりなります．これは，点間の距離尺度が r 以下の点をまとめる方法です．暈かすことは，種々の半径の円盤を使って平面を円盤で埋め，点の繋がり方を評価することに対応しています． このような

問題は, r を電波が届く距離と考えれば, 携帯端末の集合を作ることになります. 携帯端末の利用者が移動すれば集合は時々刻々と変わっていきます. ロボカップのロボットに求められる通信可能範囲を決める問題となります. たとえば, ある 1 台の携帯端末が次の時間に集合から遠く離れてしまった場合には基地局を利用したり, ほかの携帯端末も移動して, 集合が一続きになるように補償しなければなりません. このような点集合の配置を扱う幾何学を確率幾何学といいます. 当然, 3 次元では空間を埋める要素は球になります. 高い次元では超球になります.

講評

ほとんどの解答が点集合の微細構造に着目した手法か, あるいは, 直線で分離する手法あるいは, 曲線を決める手法を考えいました. ただし, 次元の問題に関しては苦労したようです. 点分布の大局構造と局所構造を同時に考える方法は一人だけが気づいていました. この点を評価しました.

課題 3 の小課題 1 と課題 4 とは一見関係が無いようですが, 実は関係があります. 何らかの条件を利用して集合を分けたり, 合弁したたして, 望みの性質の集合を構成したり, 集合の中から求める情報を探し出したりすることを行っています.