第 14 回数理科学コンクール課題

1. 4 つの課題を用意しました. いくつの課題に解答してもかまいません. また, 1 つの課題にいくつ解答してもかまいません. 例えば, 実験をして見つけた解答と, 実験をせずに考えた解答との 2 つの解答を提出してもかまいません. むしろ 2 種類以上の解答を歓迎します. その場合にはどうして答えが 2 つ以上になったかも説明してください.

2. グループで参加した諸君は, 1 つの課題に 1 つの解答でも, また, 複数の解答でもかまいません. たとえば, 協力して解答を考えたけれども, 途中から別々の結論を思いついた場合には, それぞれの参加者が別々に解答してもかまいません. その場合, 1 つの解答を一緒に提出する参加者の名前を, 解答用紙に記入してください. たとえば, A さん, B さん, C さん 3 人のグループで, A さんと B さんが 1 つの解答を, C さんが 1 人で, 別の解答を用意した場合には, A さん, B さんが用意した解答用紙には, グループ番号, A さん B さん 2 人の名前と参加番号を, もう 1 つの C さんの解答用紙にはグループ番号, C さんだけの名前と参加者番号を記入してください.

3. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません. ただし, 異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください. また, 1 つの課題に 1 つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください. 1 つの課題に 2 つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください.

4. 課題に関する質問は監督者に質問してください. どんな質問でもどしどし質問してください.

5. 5 階の H-52 講義室と 5 階のフロアーには解答を考えるための実験用の道具, 教材, 機器が用意してあります. 何を使っても構いません. 工具の利用法は監督者に相談してください.

平成 23 年 7 月 17 日 千葉大学先進科学センター

課題１深さが一定の海岸があるとする．海岸一帯に波が立たない水域を作りたい．波面は直線的に進むがその速さは水深の平方根に比例します．海底の構造を工夫してそれを実現するにはどのようにすればよいか考えてください．できるだけ労力を少なくするにはどうすればよいかを考えてください．

ただし，波が崩れていない領域で海底に構造を作るものとします．また，波の周波数（波長）は１種類として考えてください．

課題２ 図 1(a), (b) のように, 互いに接する３つの円盤の作る隙間を大きさを変えながら常に３つの円に接するように配置して埋め尽くす問題は “Apollonian packing”(アポロンの敷詰め（詰込）) と呼ばれ, その起源は紀元前 200 年にさかのぼります. このような問題は地震の発生メカニズムとの関連で研究が

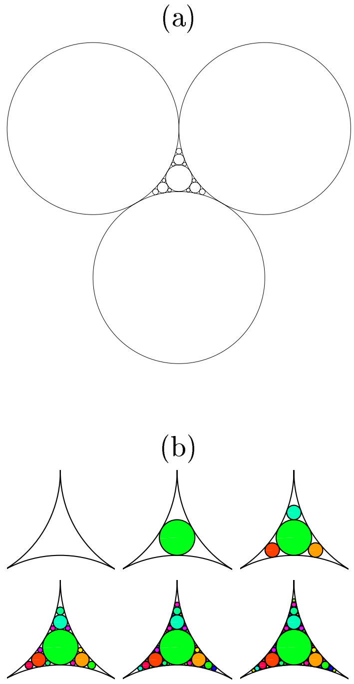

図 1: “Apollonian packing”(アポロンの敷詰め（詰込）) (a), 拡大 (b)

されるようになっています. 地震が発生することなしに大陸（地面）の乗ったプレートが滑る現象があり, それは, ２つの反対方向に動くプレートの間にプレートが崩れた様々な大きさの破片が挟まれているが, 破片がベアリングの役割をすることによってプレートが滑らかに滑るからではないかと考えられています.

さて, 今日はこの問題と関連して, 図 2のように, 円筒内に数個の円柱をそれまでの世代の円柱に接するように置き, 残った隙間をより小さな円柱で同じことを繰り返し埋めていくことを考えます. そのとき, 円筒を回転させたとき, 全ての円柱が抵抗なく回転するにすることはできるでしょうか？ただし, 接した円柱, 円筒内壁は滑りなく, 互いに逆向きに回転するものとする. 可能であれば, どのような規則で配置すればよいか, その規則を見出してください. ただし, 円筒内に入れる最も大きな円柱の一つは円筒の内壁に接しているものとします.

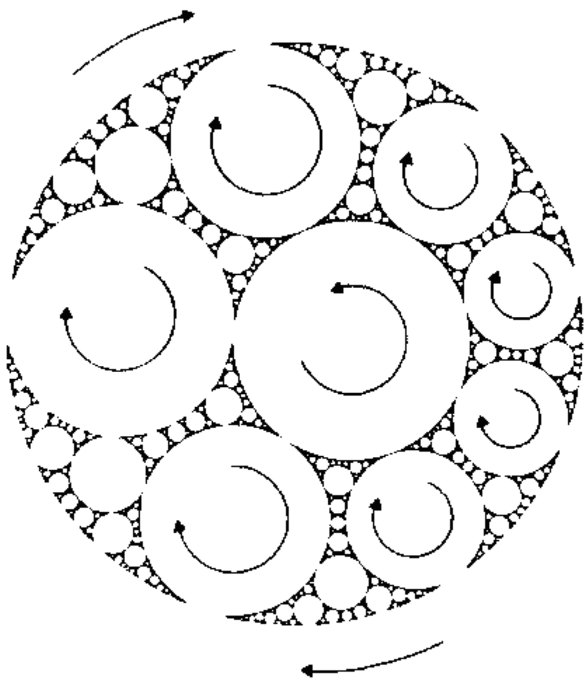

図 2: 円空間埋め尽くし回転円柱ベアリングの例

課題 3

ある問題を解くための基本的な計算の回数や, 計算を行う順序などを解析し, 計算方法の一般的法則を研究する分野を理論計算科学と呼びます. 理論計算科学で取り上げられる基本的な例題に「ハノイの塔」があります. ハノイの塔は以下の様に記述されます.

- 3 本の柱と, 柱が貫通する直径の異なる円盤が多数用意されている.
- ある柱に, ある枚数の円盤を下から上に向かって小さくなる様に配置する.
- このとき, 以下の規則ですべての円盤をほかの柱に移動する.
- 1 度に移動させる円盤は 1 つ.
- 移動中に, 常に下の円盤が大きくなる.

この問題を数学的に記述すると, 3 つの記憶領域　A, B, C を用意する. 領域 A にデータ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を記憶する. このとき, 処理途中にデータの順序を変えずに, すべてのデータを一ずつ動かして, 領域 B に移動させる. $n = 3$ のとき状態推移は以下の様になります.

A	B	C
$(1,2,3)$	$(\ ,\ ,\ )$	$(\ ,\ ,\ )$
$(\ ,2,3)$	$(\ ,\ ,1)$	$(\ ,\ ,\ )$
$(\ ,\ ,3)$	$(\ ,\ ,1)$	$(\ ,\ ,2)$
$(\ ,\ ,3)$	$(\ ,\ ,\ )$	$(\ ,1,2)$
$(\ ,\ ,\ )$	$(\ ,\ ,3)$	$(\ ,1,2)$
$(\ ,\ ,1)$	$(\ ,\ ,3)$	$(\ ,\ ,2)$
$(\ ,\ ,1)$	$(\ ,2,3)$	$(\ ,\ ,\ )$
$(\ ,\ ,\ )$	$(1,2,3)$	$(\ ,\ ,\ )$

代表的な解法は以下の 2 つです。

解法 1

1. 高さ $(n-1)$ の塔を A から C に移す.
2. n 番目の円盤を A から B に移す.
3. $(n-1)$ の塔を C から B に移す.

解法 2

以下の処理を交互に繰り返す

1. 最小の円盤を現在の柱から, 時計と同じ方向に動かす.

2. 円盤をやり取りする柱の対を反時計まわりに 1 ずつずらす.

さて, 映画「スタートレック」には未来の競技として, 3 次元チェスが出てきます. また, 数学的興味から, チェスの板を六角形にしたものがあります. そこで, ハノイの塔の一般化とその解法を考えてください. たとえば, 柱の数を増やす, 柱を空間的に配置して柱間の移動の制限を加える. 円盤の移動制限を変える. などがあります. これらの場合, 一般的な解法を作ることができるでしょうか.

課題 4

　高分子とは同じ構造を持った基本単位が一定の法則で繋がった構造体と考えることができます．普通，高分子は 3 次元空間に存在します．ここではまず，2 次元世界，すなわち，平面上に存在する高分子の性質を解析することを考えます．2 次元世界の高分子は，小さな円盤が接続してできた物体と考えることができます．高分子は，構成要素が一鎖や網目状に接続していますが，要素が水を仲立ちとして接し合い縺れた糸の様になります．この性質を考慮して，たとえば分子のよじれに規則性を考慮したり，枝別れに規則性を考慮すると，実際の高分子の構造をモデル化できます．いろいろな条件を考えたときに，高分子の基本要素の数と高分子の体積 (面積) と関係を見積もってください．構成要素を正方形とすると，この見積もりはどうなりますか．また，3 次元で，はどうなりますか．さらに，円盤の半径や種類による接続構造を変えると，面積，体積の見積もりはどうなります．