

第15回数理科学コンクール課題解説

平成24年11月3日 千葉大学先進科学センター

目 次

はじめに	2
優秀者氏名	4
1 課題 1	6
課題	6
解説	6
講評	9
2 課題 2	10
課題	10
解説	10
講評	12
3 課題 3	13
課題	13
解説	13
講評	14
4 課題 4	15
課題	15
解説	15
講評	16
5 ロボットの部	17

はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第15回数理科学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講評会を行う。

過去14回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第15回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

千葉大学教授 井宮 淳
東京慈恵会医科大学教授 植田 毅
(五十音順)

平成 24 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 24 年 7 月 14 日に開催しました第 15 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

第 15 回数理科学コンクール優秀者

金櫟賞	辻 政孝 内木翔太郎 益子将和 梶原勇希 郡山巧人
銀櫟賞	大舘賢人 石野優貴 茂木康一郎 浪川 澄 布施 遥 富岡賢祐 成家悠太 若杉俊哉 佐久間絢子 中村祐瑚 藤原健斗 伊藤優一 福井大貴 伊庭尚宏 望月福子 飯高真生 高橋健太 柴田 透 木村聡太 三好裕樹 藤澤瑞基 大野夏奈 鈴木 舞 水野有望 権守歩斗 佐藤佑真 李 俊虎 川浦美月 瀧本航平 小林敏樹
学長賞	川口海周 木内 萌

課題	参加者名
1	梶原勇希 郡山巧人 木内 萌 伊庭尚宏 望月福子 飯高真生 権守歩斗 佐藤佑真 李 俊虎 川浦美月 瀧本航平 小林敏樹
2	梶原勇希 郡山巧人 木内 萌 大舘賢人 大野夏奈 鈴木 舞 水野有望
3	川口海周 辻 政孝 内木翔太郎 益子将和 三好裕樹 藤澤瑞基 梶原勇希 郡山巧人 木内 萌
4	川口海周 木内 萌 石野優貴 茂木康一郎 浪川 澄 布施 遥 富岡賢祐 成家悠太 若杉俊哉 佐久間絢子 中村祐瑚 辻 政孝 内木翔太郎 益子将和 藤原健斗 伊藤優一 福井大貴 高橋健太 柴田 透 木村聡太

千葉大学先進科学センター長
教授 中山隆史

1 課題 1

課題

円筒に砂や液体を詰めて斜面を転がすとその円柱はどのように転がるか？砂や液体の量, 種類, 斜面の角を変えて現象を考察してください. また, 円柱の中で砂や液体の表面の形はどのようなになるか調べてください.

解説

昔ながらの玩具には単純な構造にもかかわらず複雑な動きをするものも少なくありません. その多くは重心や慣性モーメント (回転し難さ表す物理量) が運動と共に変化することにより起こっています.

この問題はその基本的な仕組みを理解するために考えてもらいました.

粉粒体の挙動は非常に特殊で, 地震や山津浪などとの関連で盛んに研究されています. 移動している粉粒体の形状がどのようなになるかという問題は粉粒体のなだれの自由表面形状という, 身近で単純そうに見えてなかなか難しい問題です. この問題では, 更に, その形状変化が容器の運動にどのように影響を与えるかを考えなければならないので, 現象的には単純かもしれないけれども, 理論的取り扱いには複雑なものとなります.

2011 年, 東京農工大学工学部のグループがこの課題に関する研究論文を発表しました. この論文では以下のような結果を得ています.

外直径 200mm, 幅 30mm のアクリル円筒容器に直径約 1mm, 比重 1.04 の樹脂製ビーズを容積の半分密閉し, 斜面の傾斜を変えながら実験を行った (図 1).

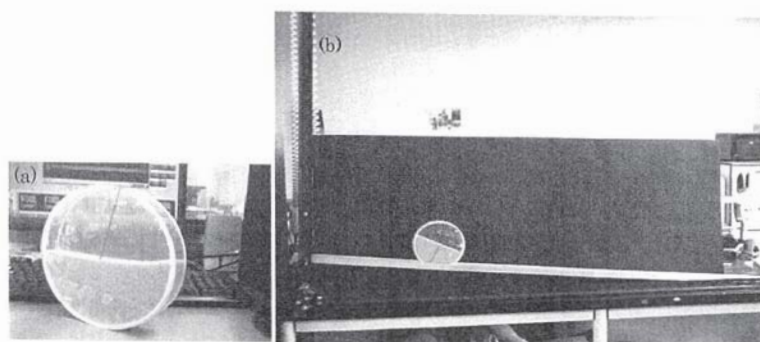


図 1: (a) 粉粒体を封入した円筒 (b) 実験装置全景

図 2 には速度の小さな振動が見られるが, これは測定誤差とのことで, その誤差を除いても (a) には周期的な変化が見られる. これは円筒の重心移動による影響と考えられる.

平均加速度は角度が大きくなるにつれて図 3 のように急激に大きくなる. これは密度が一樣な剛体円柱を斜面上で回転落下させた場合の加速度 $\frac{2}{3}g \sin \alpha$ や厚さが無視できる円筒の場合の加速度 $\frac{1}{2}g \sin \alpha$ に比べて非常に小さい.

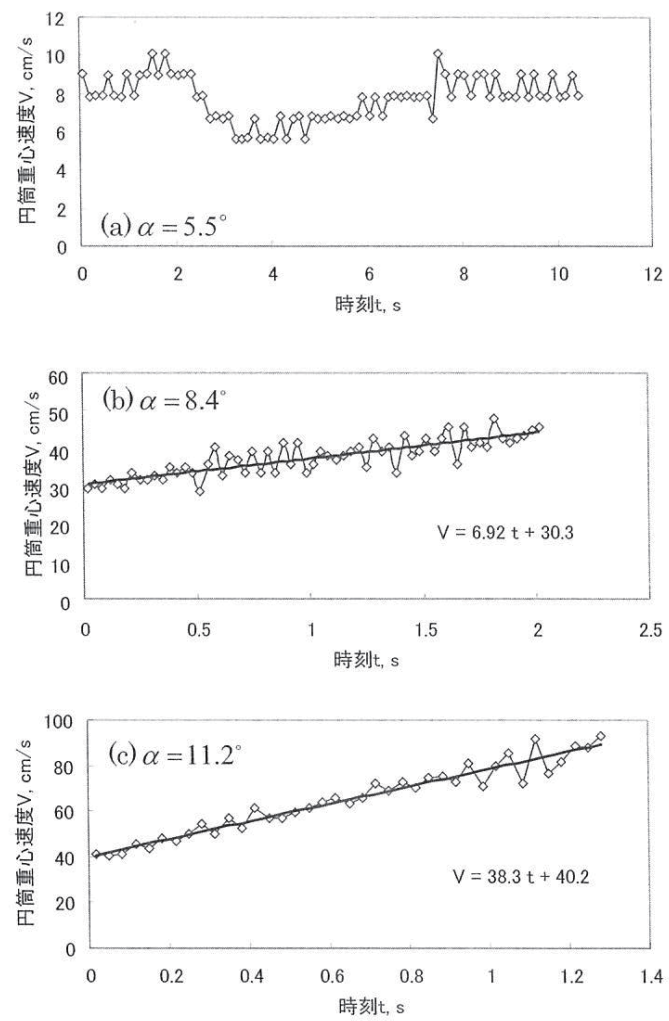


図 2: 円筒重心速度の時間変化. 傾斜角 (a) $\alpha = 5.6^\circ$, (b) $\alpha = 8.4^\circ$, (c) $\alpha = 11.2^\circ$

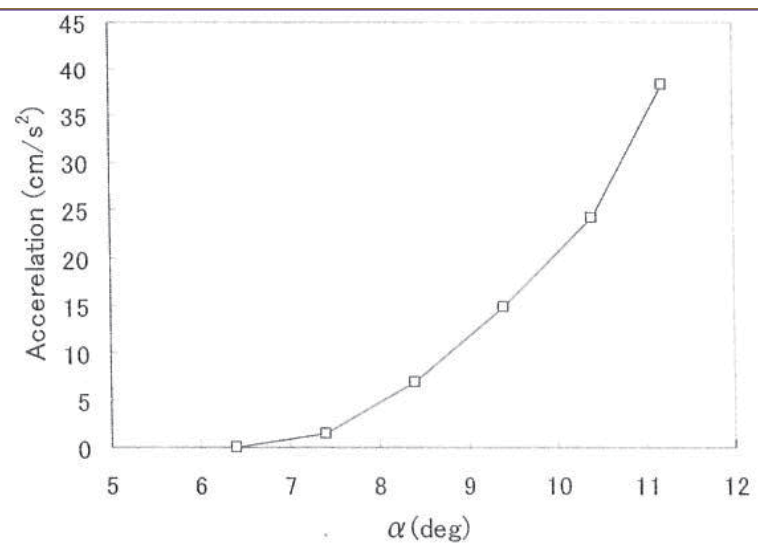


図 3: 斜面角と円筒重心の平均加速度の関係

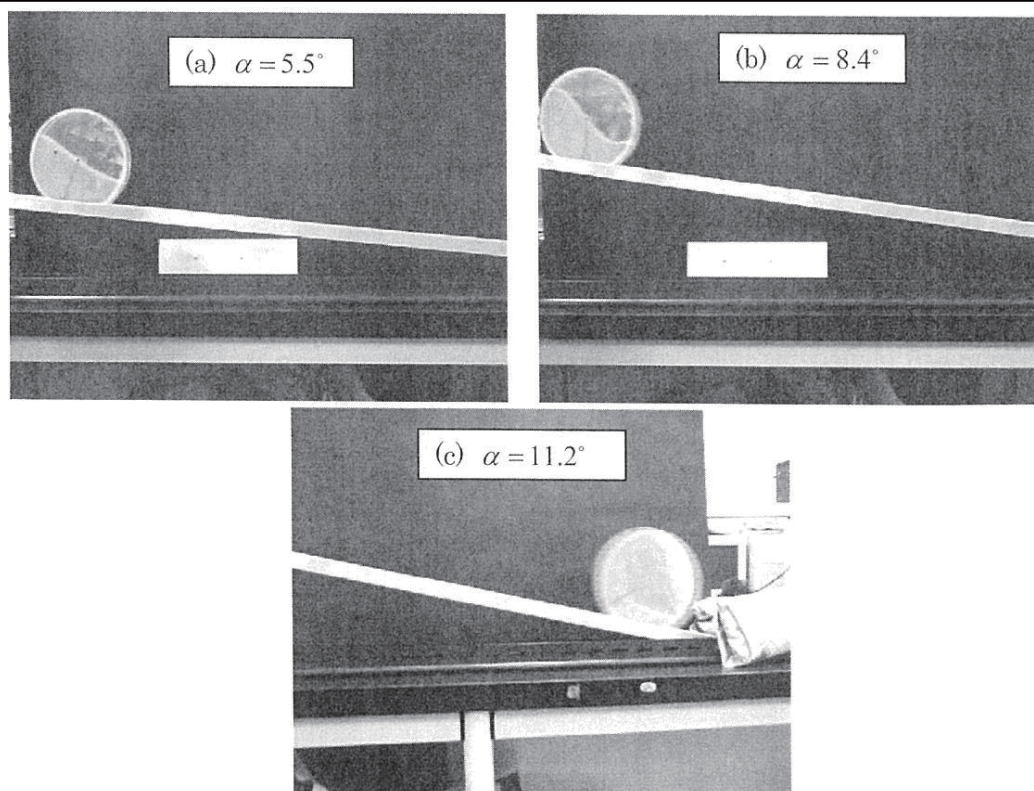


図 4: 回転落下円筒中の粉粒体なだれの自由表面形状

各角度での粉粒体なだれの自由表面形状は図 4 のようになる。角度が小さな場合には界面は直線的であり (パターン I), $\alpha = 8.4^\circ$ の (b) では表面形状は S 字型 (パターン II) になっている。 $\alpha = 11.2^\circ$ の (c) では円筒が斜面を下るにつれて、円筒の全側面が粉粒体に覆われる割合が大きくなり、ついには全側面が粉粒体によって覆い尽くされるようになる (パターン III)。パターン I からパターン II に移り変わる角度 (臨界角) は約 5.6° で、パターン II からパターン II への遷移の臨界角度は約 9.1° であることを見出している。ただし、これらの値は長さが約 200cm の斜面を回転落下する場合であり、もっと長い斜面を落下した場合には回転速度が大きくなり、遠心力によりパターン III になると考えられます。

論文では理論的解析も行っているが、高校物理の範囲を超えるので省略します。また、この研究グループは円柱内に様々な粘性の液体を封入した場合の研究も行っています。

参考文献

平山修, 遅成軍, 宮澤達也: 内部で粉粒体なだれがおこる円筒の斜面上での回転落下運動, 形の科学会, vol. 26 (2011) pp.1-10

O. Hirayama: Demonstration and Experiments of Rolling Motion of Cylindrical Objects Down a Slope, J. Phys. Sci. and Appl. vol.2, (2012) pp.40-45.

平山修, 栗川 連: 内部に液体を含む円筒の斜面上の回転落下運動と液面の形状, 形の科学会, vol. 27 (2012) pp.25-26.

講評

この課題は筒にビーズや粉を封入して転がすだけでいいものなので多くの参加者が取り組んでいました。しかし、なんとなく転がしているだけでは現象の本質を見失うので、どの条件を揃え、何を変化させていくか、計画的に実験できることが肝要になります。転がっているときの表面の形を見た目だけでは分からないのでデジタルカメラを用意してありましたが、こちらの意図通りに使ったグループもしくは個人はそれほど多くありませんでした。この課題ではストップウォッチを用意しませんでしたので、板の角度による落下速度の変化については評価対象にしませんでした。表面の形についてはよく観察できていたように思います。実験がより計画的にシステマティックに進められたものを高く評価しました。また、なぜ、そうなるのかの考察をした解答もありました。論点が明確で指針の正しいものを評価しました。

2 課題 2

課題

コーラ、シャンパンなど炭酸飲料は注いだときに泡ができるが暫くするとその泡は消えてしまう。石鹸の泡も同じように時間をおけば消えてしまいます。泡はなぜ消えるのでしょうか？ 泡の消え方の法則を見出してください。

解説

シャボン玉が1つある場合、時間が経つとシャボン玉の膜を作る液体が重力により下がっていき、最上部の膜厚が薄くなり、最終的に破裂します。この課題では泡が集まりくっついているとき (foam) にどのように消えて行くのか、その法則を考えてもらいました。

泡の形はたくさん集まっている場合にも（重力を無視すれば）表面張力によって決定されます。

膜の厚みが一様であるとする、時々刻々その時点で表面積が小さくなるように変形していきます。細かな泡が沢山あると表面積も大きいので小さな泡がなくなり、次第に大きな泡の集まりとなっていきます。

また、小さな風船と大きな風船をパイプでつなぐと小さな風船の内側の圧力（実際には風船の外の大気圧との差）の方が大きいので（ラプラスの法則、これは漫画やテレビドラマの医龍で取り上げられている拡張型心筋症のバチスタ手術（心筋の病変部を切り取り拡張した心臓を小さく成形する術式）の物理学的根拠になるものです）、小さな風船の中の空気は大きな風船の方に押し出され、小さな風船は大きな風船に吸収され、潰れます。泡の場合にも同じ過程が生じます。

これが繰り返され、細かな泡から次第に大きな泡となり、最終的に泡が消えてしまいます。これを粗大化と呼びます。

粗大化の過程では、膜の厚みが一定であるとする、2次元でも3次元でも、泡を円や球で近似したときの半径の平均 $\bar{d}$ が時間 t に対して

$$\bar{d} \propto (t - t_0)^{\frac{1}{2}}$$

となることが示されます。 t_0 は定数。

また、2次元系で i 番目の泡の辺の数が n_i 、泡の面積を a_{n_i} とすると、その面積の増加率は

$$\frac{da_{n_i}}{dt} = \kappa (6 - n_i)$$

と書けることが知られています。これを von Neumann 則と言います。厳密には理想的な2次元ドライフォームにしか適用できませんが、泡についての (i についての) 平均をとれば、2次元ウェットフォームや3次元フォームでも成り立つことが実験的に示されています。ただし、3次元について成り立つ理由は未だ説明されていません。

この物理学的研究も大規模なコンピュータ・シミュレーションが可能になった比較的近年になって行われるようになりました。3次元では扱いが大変なので、まず2次元系を取り扱った研究がなされました。

James A. Glazier, Steven P. Gross and Joel Stavans: Dynamics of two-dimensional soap froths, Physical Review A, vol. 36 (1987) pp.306-312

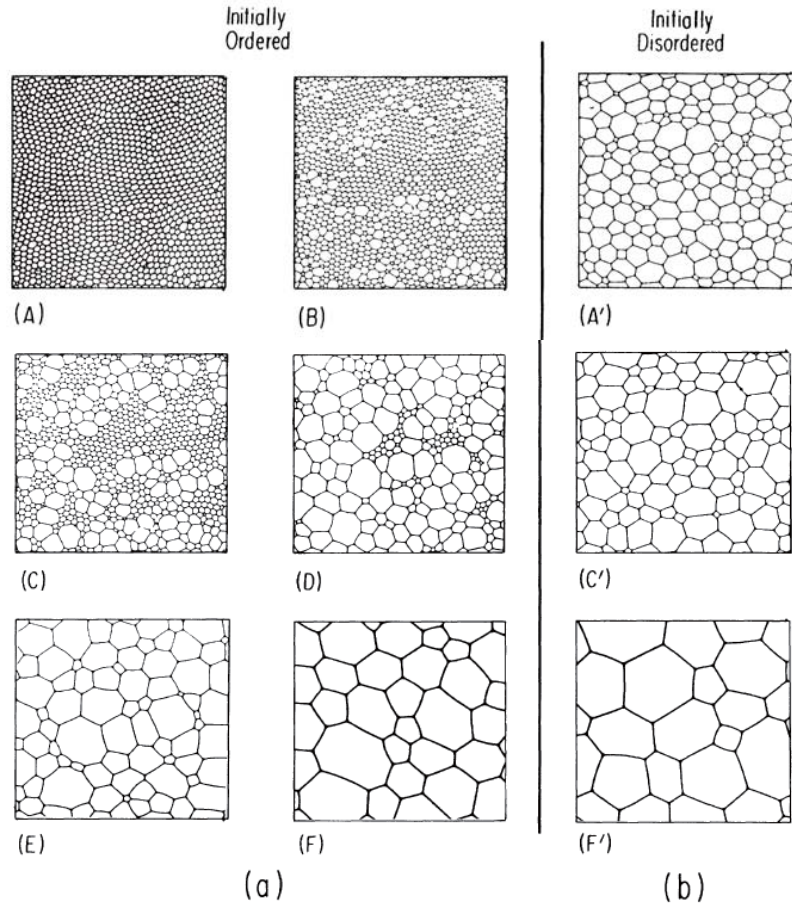


図 5: 粗大化の例 (a) 初期状態の泡の大きさが揃っている場合 (b) 初期状態の泡の大きさが不揃いな場合

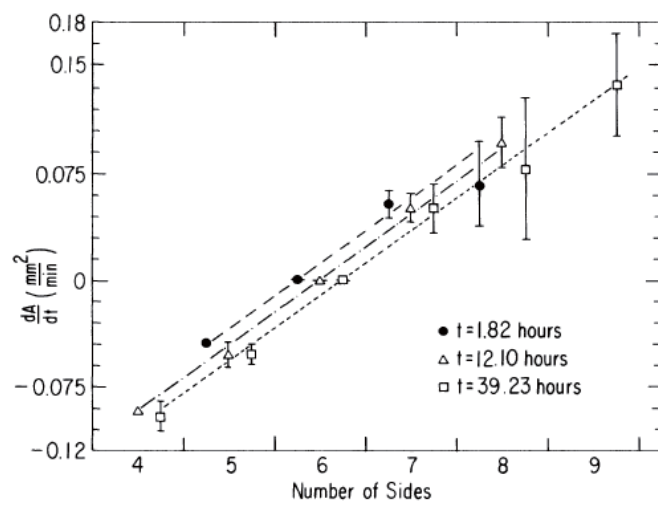


図 6: 各時刻での平均した von Neumann 則

その 11 年後に

C. Monnereau and M. Vignes-Adler: Dynamics of 3D Real Foam Coarsening, Physical Review Letters, vol. 80 (1998) pp.5228-5231.

により 3 次元の泡が消えて行く様子が実験的に報告されました.

参考文献

大塚, 佐藤, 北菌共訳:泡の物理, 内田老鶴圃, 2004 年

講評

この課題も取っつき易かったためか, 多くの参加者が取り組んでくれました. 積極的に実験を行っていた割には泡がどのように時間変化するのかじっくりと観察できた解答は非常に少なかったように思います. また, 一つの泡がどのように変化するのかを考察した例も見られました. この場合でも, 物理的に適切な考察であれば評価しました.

泡の時間変化をしっかりと観察できていること, 次第に泡が大きくなっていくことを発見していること, なぜそうなるのかを考察していることが評価のポイントになります. しっかり現象を観察できている解答については高く評価しました.

3 課題 3

課題

ユークリッドの原論によれば、点とは「位置をもち、部分を持たないものである。」となっています。また、2つの異なる点を与えれば、それらを通る直線は一つに決まることになります。直線は、太さを持たない幾何学的な対象である曲線の一種で、どこまでもまっすぐ無限に伸びて端点を持ちません。従って、ある有限の図形と交わる直線は無限に存在することになります。

一方、現実のものは幅があるので、図形と直線の交わりの問題は、図形とテープとの交わりになります。すなわち、図形と交わり図形を隠すには有限の本数のテープで十分であることが分かります。この問題を、曲面で考えてみましょう。球面に沿って紐を一重になるべく長く巻きつけるには、どのようにまけばいいでしょうか。長く巻きつけるために紐の太さと球の半径の間に何か関係があるのでしょうか。

解説

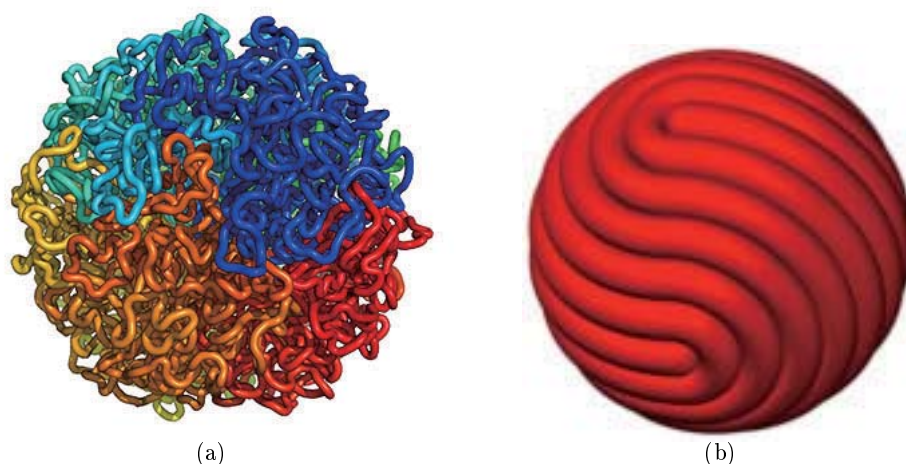


図 7: DNA と球面上の紐の巻きつけ: (a)DNA の折込み (1)(2). (b) 球面上への紐の巻きつけ (3).

(1) <http://www.sciencenews.org/view/generic/id/48166/description/>

New_view_reveals_how_DNA_fits_into_cell

(2) <http://mathoverflow.net/questions/70803/shortest-painting-of-the-sphere>

(3) <http://arxiv.org/abs/1005.4609>

DNA は長い二重螺旋であることはよく知られています。DNA は折りたたまれて染色体となり細胞核の中に存在します。では DNA はどのように小さな細胞核の中に格納されているのでしょうか。ここでは、問題を単純化し、球体である細胞核の内壁に、紐である DNA が貼りついて格納されていると考えて

みましょう。また、球面の内部に紐を張り付けることなかなか実験ができないので、ボールの表面に紐を巻く等価な問題に変換して考えてみます。図 7(a) に DNA の折り込みを示します。

遺伝情報伝搬の間違いが発生する確率が小さくなるように、DNA には誤り訂正のための冗長な部分が多く存在します。したがって、球に巻きつける紐の長さが長くなるように巻き込まれていると考えることが自然です。球面上に螺旋に巻き込めば、最も長く巻きつけることができます。逆の問題に、リンゴの皮を長く続けて剥く競技があります。さて、このような紐が長くなる巻き方、逆に皮が長くなる剥き方はどのような巻き方一種類だけなのでしょうか。答えはいくつもあり、紐を折り規則的に曲げて巻くことができます。そして、紐の太さによって、折り曲げの最大回数が決まります。同様な問題は、正方形の領域に紐を折りたたんで詰め込む場合、同じ長さでもいくつも詰め込み方があります。図 7(b) に球面への紐の巻き付けを示します。

講評

この問題は「形の最適化」と呼ばれる問題に属します。抽象的には、ある条件のもとで、何かの最大値や最小値を計算し、最大値や最小値を与える答えが幾つあるか調べ、いくつもある場合は複数の答えの関係を調べることになります。自然界は、形の最適化を自然に行っているといわれています。遺伝子の構造、生物の形なども最適な構造をしているといわれています。人口構造物の設計も形の最適化として取り扱われます。

解答は、螺旋巻にたどり着いていますが、その性質の完全な解明には至っていませんでした。
参考文献

Henryk Gerlach, Heiko von der Mosel: On Sphere-Filling Ropes, American Mathematical Monthly, vol. 118, pp. 863-876 (2011)

4 課題 4

課題

漢文はもともと古い中国語の文です。従って、漢文の主語、動詞の語順は英語に似ています。日本語文と漢文の語順の違いを変えて、漢文を日本語のように読みこなすための手段が返り点です。

文章は、文章を根、として、主語、述部とに分けられます。さらに、述部は述語と目的語とに分かれます。この関係を木構造といいます。主語、述語、目的語は枝の先について葉の名前となります。返り点はこの木の上で、枝を入れ替える操作にすることに相当します。図 8 に語順の変換の例をしめします。

返り点を使って英文を日本語文に直すことを考えてみましょう。このとき、漢文で利用する返り点の規則だけで、英文を日本語の語順に変換することができるか、あるいは、漢文の返り点規則だけでは不十分か、さらに、不十分であれば何が不足しているか考えてください。

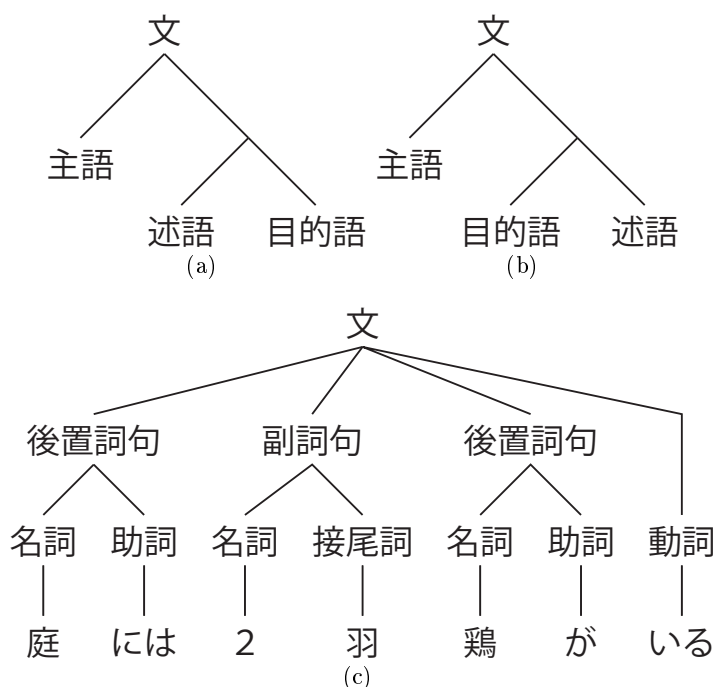


図 8: 構文木: (a) の述語と目的語を入れ替えると (b) になる. (c) 文を木で表した例.

解説

言語の使い手が従うべき規範を文法と言います。日本語の文法（国文法）があるように、それぞれの言語にはそれぞれの文法があります。古来、我が国は外国からの新しい知識の吸収を行ってきました。最も早く影響を受け、長く教育にも利用されたものは漢籍です。ただし、漢籍を中国語として学んだのではなく、日本語に翻訳して理解することが行われました。日本語と中国語とは、文法が異なるため漢籍に記された文章である漢文を、日本語の文法に従った単語（語彙）の順序に直す手続きとして、返り点の用法が併用されてきました。一方、文章はその言語の文法構造にしたがって、文章の木として表願することがで

きます。文章を解析しその構造を導くことを構文解析と言います。漢文解読のための返り点は、漢文の構文解析をし、その構文構造を記述する数学的な記法になっています。

ある言語を異なる言語に計算機によって翻訳することを機械翻訳と言います。最も基本的な機械翻訳は、文章の構文解析を行い、翻訳先の言語の文法にしたがって構文解析結果の語順を入れ替え、元の文章の単語を、翻訳先の対応する単語に置き換えることです。このことから、返り点は漢文を日本語文の語順に変換する規則であると考えられます。したがって、漢文と日本語文の関係を英文と日本語文に置き換えれば、返り点と同様な考えで英文を翻訳することが可能となります。このことから、一般に同語族の機械翻訳は英語と日本語のような異なる語族の間の機械翻訳よりも比較的容易に実現できることがわかります。我々の先祖は、計算機の発明以前から、機械翻訳のための基本的なアルゴリズムを設計してきたことになります。

講評

ほとんどの解答が丁寧に言語の置き換えの問題を考察していました。言語学は大学では文学部の範疇になり、言語の多様性、親近性を研究します。一方、機械翻訳は情報科学の範疇になり、情報科学では、機械翻訳の設計と実現を研究することになります。言語と言う最も文化系的な対象を数理的に取り扱うことが行われます。機械翻訳は旧来の文化系理科系の二分法では取り扱えない分野と考えることができます。実は、翻訳や英文解釈の基本的な部分は数学的な問題であることがわかります。一方、単語には意味があり、単語の示す意味の範囲として意味領域があります。なめらかで分かりやすい翻訳あるいは意識と呼ばれるものは、構文解析の結果と、意味の解析である意味解析を合わせて行った結果と考えることができます。

5 ロボットの部

平成21年度 22年度に開催したロボットの部は本年度はロボットへのサポートの停止により休止しました。新たなロボットを利用して再開すべく、用意をすすめています。