

目 次

はじめに	2
優秀者氏名	4
1 課題 1	6
課題	6
解説	6
2 課題 2	10
課題	10
解説	10
3 課題 3	16
課題	16
解説	16
4 課題 4	18
課題	18
解説	18
5 ロボットの部	22

はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第16回数理科学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講評会を行う。

過去15回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第16回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

千葉大学教授 井宮 淳
東京慈恵会医科大学教授 植田 毅
(五十音順)

平成 25 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 25 年 7 月 13 日と 14 日に開催しました第 16 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

第 16 回数理科学コンクール優秀者

金樺賞	池田知徳 小幡純也 中田 希
	高木康太 永田聡志
	青木敦貴 上田洸希 宮下優一
銀樺賞	堀江真惟人
	佐藤佑磨
	笹井洸希 櫻井 駿 岡田正大
	大竹里奈 中川真代
	茂木康一郎 浪川 澄 布施 遥
	沼 祐之介 尾野貴大 大塚知輝
学長賞	櫻井幸太 白沢有紀 嶋田朱里
	高野実紅
	森 隆慶 中村歩未
	片岡知徳 小笠原佑太
機巧賞	郡山巧人

課題	参加者名
1	青木敦貴 上田洸希 宮下優一 沼 祐之介 尾野貴大 大塚知輝 櫻井幸太 白沢有紀 嶋田朱里 笹井洸希 櫻井 駿 岡田正大
2	高木康太 永田聡志 池田知徳 小幡純也 中田 希 片岡知徳 小笠原佑太 青木敦貴 上田洸希 宮下優一
3	高野実紅 堀江真惟人 高木康太 永田聡志 大竹里奈 中川真代 茂木康一郎 浪川 澄 布施 遥
4	佐藤佑磨 池田知徳 小幡純也 中田 希 森 隆慶 中村歩未

千葉大学先進科学センター長
教授 橋本研也

1 課題 1

課題

人間や哺乳類が歩行するとき、手や足が振子として重要な役割をしています。この性質を考慮して以下の問いに答えなさい。

問 1 脚の長さ l が変化するとき、歩行速度はどのように変化するか力学的に考察しなさい。

問 2 脚の長さ l が変化するとき、走行速度はどのように変化するか力学的に考察しなさい。

問 3 最も楽に (エネルギーを消費せずに) 移動する (歩行もしくは走行で) 速度を考察しなさい。

解説

この課題を通して大事なことは、歩く、走るということはどういうことかをはっきりと定義しなければならないということです。最近、HONDA の人型ロボット、アシモがしなやかに駆け足ができるようになりました。つまり、走ることができるようになったわけですが、何をもって走るというのが分からなければ走れると言えません。陸上競技の競歩のルールから歩くと走るの違いが分かります。競歩では「常にどちらかの足が地面に接していること（両方の足が地面から離れると、ロス・オブ・コンタクトという反則となる）」というルールがあります。これが「歩く」の定義で、逆に、両足が地面から離れる瞬間があると「走る」になります。アシモも両足が離れる瞬間があるから駆け足が実現したと言えるようになったのです。

余談になりますが、人間は 2 足歩行なので 2 本足が同時に離れるかどうかと比較的簡単ですが、4 足歩行の動物ではなかなか難しくなります。馬術では馬の走る（歩く）ようすを、早くなる順に次のように呼び区別します。

- 常歩（なみあし, walk, 四肢が別々に着地・離地する歩き方で、常に 2 本あるいは 3 本の肢が地面に着き、体重を支えている）
- 常歩が早くなるとアンブル（amble, 馬が片側の両脚を同時に上げて 4 拍子で進む歩き方）という
- 速歩（はやあし, trot (速歩 (はやあし) 右前肢と左後肢（右斜対肢）, 左前肢と右後肢（左斜対肢）がペアになってほぼ同時に着地・離地する「斜対歩」と、右前肢と右後肢（右側対肢）, 左前肢と左後肢（左側対肢）がペアになる「側対歩」とがある。）
- 駢歩（canter, 3 本の肢が接地している時期と、4 本の肢すべてが地面を離れている時期とがある。）
- 襲歩（gallop, 3 本以上の肢が接地している時期がなく、全速力で走る際の馬の歩き方）

さて、足には膝があり、くるぶしがあり、「歩き」をそのまま物理的に取り扱うのは非常に複雑です。そこで、物理学（バイオメカニクス）では大胆な単純化を行います。足は太さ、密度一定の棒だとします。

膝, くるぶしでの屈曲は考えません. 歩行は, 上端を固定し自由に振動できるようにした脚 (棒) の交互の自由振動だとすると以下のように方向速度を見積もることができます.

上端を固定し自由に振動できるようにした質量 m , 棒の支点周りの慣性モーメント I の棒 (物理的には実体振子という) の振動の周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl_G}}$$

と求められます. ここで, l_G は支点から棒の重心までの距離で, g は重力加速度です. 慣性モーメントは回転のし難さを表す量で, 長さ l の一様な棒の場合, 一方の端を軸とした回転の場合には

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

と与えられます. また, 棒の重心は中点にあると考えられるので, $l_G = l/2$ となり, 周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{l}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}$$

となります. 脚の長さが 90cm のとき, 周期は 1.6 秒になります.

この棒に固有の周期 (固有周期という) で脚を動かすと筋肉の動きを最小にするような歩行速度を見積もることができます.

歩幅は足の長さに比例すると考えられ, 一步の時間はこの振り子の周期の半分ですから, 歩行の速さ v_{walk} は

$$v_{\text{walk}} \propto \frac{l}{T} \propto \sqrt{l}$$

のように, 足の長さの平方根に比例します. これによると, 脚の長い人ほど楽に歩く速さが速いと考えられます. この計算は極端に単純化したものですが, この結果は経験則とも一致しています.

他方, 走るときには脚は自然と振れるのではなく, 筋肉が発生する力により強制的に振動させます. 筋肉の大きさが変わる場合には筋肉は相似な形で変化するとすると, 脚の筋肉の長さは脚の長さに比例しますが, その断面積は l^2 に比例し, 筋肉の質量は l^3 に比例します. 筋肉が発生する力 F はその断面積に比例しますから l^2 に比例することになります. 足を回転さるトルク (力のモーメント) N は筋肉が発生する力 F と回転の軸と力の作用点の間の距離の積に比例するので

$$N \propto Fl \propto l^2 \times l \propto l^3$$

となります.

実体振子の振動周期は mgl_G に依存しますが, これは質量 m のものに重力が発生するトルクであり, 周期的に変化するトルクが働くとき, 支点の周り振動する棒の周期は一般にトルクの最大値に比例し,

$$T \propto \sqrt{\frac{I}{N_{\text{max}}}}$$

と与えられます. 棒の質量 m (筋肉の質量も含む) は l^3 に比例しますから, 慣性モーメントは $I \propto l^5$ に比例し, N_{max} は l^3 に比例します. したがって, 周期は

$$T \propto \sqrt{\frac{l^5}{l^3}} \propto l$$

のように l に比例することになります。走る速さは脚を進める振動数 f と一歩の長さの積に比例するから

$$v_{\text{run}} \propto f \times l \propto \frac{l}{T} \propto \frac{l}{l} = 1$$

を得ます。走る速さには脚の長さは無関係ということです。

以上から、競歩は体の大きな人が有利ですが、マラソン、短距離走には体格差は関係ないということになります。

さて、ここまで考えてきた模型で歩いたり走ったりするのに必要なエネルギーについては、歩行については、棒の自由振動とみなしているから必要なエネルギーはなく、走りについては強制的に脚を振動（回転運動の一部）させるためのエネルギーが必要で、最下点での爪先の速さを v 、脚の慣性モーメントを I すると、一歩で必要なエネルギーは $\frac{1}{2}I(v_{\text{max}}/l)^2$ となります。これは詳細に検討すると mv^2 と評価できます。これは脚の運動エネルギーが全て散逸するわけではなく、位置エネルギーとして回収できることを無視しているなど単純化していますが、他のモデルで評価しても2倍程度の違いでおおよそよく見積もれています。

歩行については、もう少し詳細な模型として、脚を開いた状態から、片方の脚（棒）を支柱として、重心を移動し、重心が支柱の真上に来たら、自由な方の脚（棒）を振り子のように振り、前に出し、前に出した脚が地面に着くように体重移動します。これを繰り返す、進んでいくものと考え、一歩に着き、一度体重の重心の上下動が発生します。これにより、位置エネルギーの変化により歩行に必要なエネルギーを評価できるようになります。

詳細な研究によると、歩行、走行速度に対して1m移動するのに必要なエネルギーがどのように変化するかを図1にします。

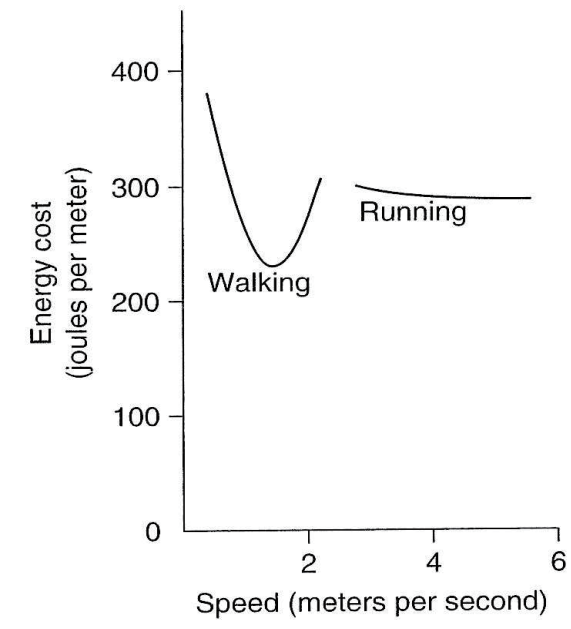


図 1: 1m 移動するのに必要なエネルギーの歩行、走行速度に対する変化

この図より、単位距離を歩くのに必要なエネルギーは歩く速さが速すぎても遅すぎても不大きくなり、

最小になるのは秒速 1.3m (時速 4.7km) で歩くときであることが分かります。この値は棒振子モデルで脚の長さを 90cm として求めたものとわずか 13%しか変わりません。秒速 1.3m 超え秒速およそ 2m までの速さで移動するなら歩く方がエネルギー効率は良いですが、これよりも速く移動するには走った方が効率的になります。非常にゆっくり歩くときには走るときよりもエネルギー効率が悪くなります。その意味ではジョギングよりも太極拳の方がダイエットには効果的であると言えます。

ここで行ったような考え方は水泳についても成り立ち、例えば、クロールで泳ぐ場合に腕を回す速さには腕の重さ、長さで決まる固有の周期があり、その速さで泳ぐのが最も楽な泳ぎ方になります。

また、ここでは、脚の長さが変わった場合に移動速度がどうなるのかを考えましたが、大きさが変わるとどのようなことが起こるのかを考えるのは物理学だけでなく、生物学などすべての科学において非常に重要な研究手法です。例えば、ある材質のブロックで底面の 1 辺 30cm のピラミッドを作れたとして、その材料で底面の 1 辺 100m のピラミッドが作れるか？体長 1m のトンボ、直径 30cm のミミズは存在し得るか？ティラノサウルス (REX) ほどの大きさのフラミンゴは存在できるのか？このような現象を理論的に扱うには支配方程式を単位を持たない型にして、その解の振舞いを調べます。このとき、大きさに関係ない普遍的な現象を見出すことができます。物理法則のサイズ依存性を明示したものをスケーリング則と言います。また、支配方程式を単位を持たない型に変換する作業をスケーリングもしくは無次元化と言います。方程式をスケーリングすることによって、方程式を解かなくても物理系の重要な情報が得られます。

また、スケーリングは特撮映画などで模型を用いて、飛行機、ロケット、船、波などを表現するときや飛行機やレーシングカーの設計をする時に模型を用いて風洞実験をする時などに重要な役割を果たします。

参考文献

1. Paul Davidovits : Physics in Biology and Medicine, Fourth Edition (Complementary Science), Academic Press; 4 版 (2012)
2. Knut Schmidt- Nielsen 著, 大原昌宏, 浦野 知 (訳) : スケーリング 動物設計論—動物の大きさは何で決まるのか, コロナ社 (1995)

講評

まず、「歩く」と「走る」の定義を考えていたかどうかを評価しました。残念ながら明確に「走る」の定義を記述していた答案は極少数でした。しかし、歩く速度、走る速度それぞれの脚の長さ依存性については正しい答えを導いていた答案がいくつかありました。考察過程、論理が正しければ結論が間違っているとも評価しました。高校生の参加者はしっかり運動方程式などを持ちた計算を行っている答案も見られましたが、物理的考察や実験から議論している場合も考察の道筋が正しければ高く評価しました。デジタルカメラを用いて歩いたり、走ったりする状態を調べたりしている答案もありました。発想は非常に重要で評価できるのですが、その映像からどのようなデータをどうやって取り出し、何を見出すのかが重要です。

2 課題2

課題

日常生活でセロテープやガムテープなど、いろいろな種類のテープを使います。テープを貼れば、剥がすこともあります。テープを剥がす時にいろいろな方向や速度で引っ張りますが、どのような方向に、どのような速さで引っ張ると、力が少なくてテープを剥がすことができるでしょうか？ もしくは、貼った絆創膏をどのように剥がしたら最も痛くないか考察しなさい。

解説

この課題はとても身近で何気なく日常的に出会う単純な課題に感じられたかもしれませんが、しかし、この課題には実はいろいろな分野に関係します。近年では航空機や新幹線などの部品をテープで取り付けるなど、かつてはボルト-ナットや溶接で取り付けていたものもテープで取り付けるようになりました。また、医療用粘着テープは臨床場面において、カテーテルなどを患者の身体に固定するために多用され、手術後傷口をきれいに直すために、肥厚性瘢痕（ケロイド）予防のテープもあります。

テープを製造している接着剤メーカーは目的に応じて、半永久的にしっかり接着できる、もしくは、強く張り付くが剥がすときには接着面にダメージを与えずにきれいに剥がせるテープなどいろいろな製品の開発のため接着と剥がしの基礎的な研究から行っている。最近でも大学でコンピュータ・シミュレーションをするなど重要な現象です。

また、医療現場ではテープを使用する場面も多く、テープによるスキントラブルは稀ではありません。看護専門学校、看護学科では、テープによるスキントラブル防止のためには、除去反応を小さくする看護手技が不可欠と考えられています。どのように剥がせば患者さんに不快な思いをさせずに済むかと言う観点でテープの剥がし方の研究を行っています。

では、それらの結果を見てみましょう。

粘着テープの剥離現象は思いのほか複雑です。近年の粘着テープの剥離の実験的研究から以下のようなことが分かっています。

- (1) 剥がれの界面は剥がれの進行方向に垂直に周期的に波打つ。
- (2) 粘着力曲線（剥がし速度に対して剥がすのに必要な力をグラフにしたもの）は一般に一般に複雑な曲線を描く。その曲線は粘着剤の性質などに依るが概略的には2つの山を描く。
- (3) 剥離のタイプは基盤からの剥がれ方の違いによって凝集剥離と界面剥離に分けらる。界面剥離、凝集剥離いずれの場合にも、剥離先端はフィンガリング不安定性（指のような形状に波打つ）を示し、周期的な糸引きパターンが見られる。
- (4) 凝集剥離では糸引き部分が破れる。
- (5) 界面剥離では糸引き部分にトンネル状の中空構造ができるかどうかで2つの異なる様式となる。

図2のように、剥離時の引張り荷重-速度曲線は凝集破壊と界面剥離で飛びのある別の枝（曲線）になり、界面剥離は2つの様相（界面剥離A、界面剥離B）の存在により遷移領域を含めてN字型の速度依存性を示します。さらに、高速な剥離では荷重は再び減少し、接着剤の粘性が失われていきます。

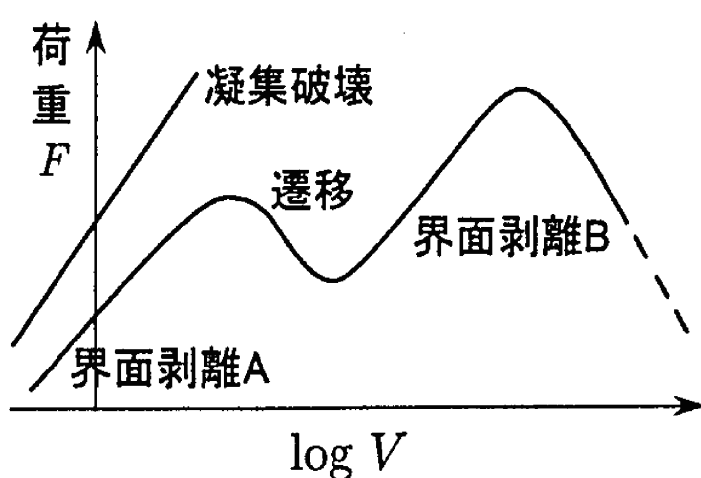


図 2: 定速剥離時の引張り荷重の速度依存性の概略図

実験ではテープや基盤、剥がし方の力のかかり方などすべてを完全に同じにすることはできないため、数値計算により普遍的な知見を得ることは非常に大切です、コンピュータ・シミュレーションによる研究もなされています。文献4では、図3に示すような模型で、剥がすのに必要な力と方向、距離との関係などを調べています。

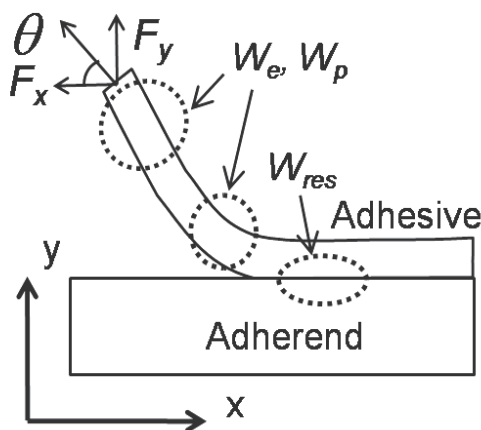


図 3: 定常剥離時の力 (F_x, F_y) と角度 θ の定義

図4にいろいろな角度で剥離したときの剥離した距離と力の関係を示します。30, 60度では剥離が進むにしたがって剥離に必要な力が増加しています。しかし、180°では10mmほど剥がしたところで急に小さくなり、再び単調に増え始まります。90°のときだけ、一度増加した後単調に減少しています。このような振舞いの変化はありますが、角度が大きい方が力が少なくて済むことが分かります。

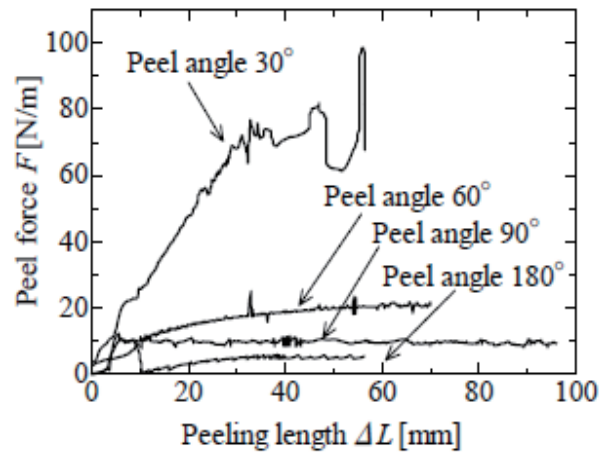


図 4: さまざまな剥離角に対する剥離した長さと力の関係

図 5 に剥離力がほぼ一定になった部分の平均値の剥離角度に対する変化を 4 種の材質について示します。これより、どの材質の場合にも剥離力は角度が大きくなるにつれて小さくなり、特に、 90° より大きくなると極端に小さくなるのが分かります。

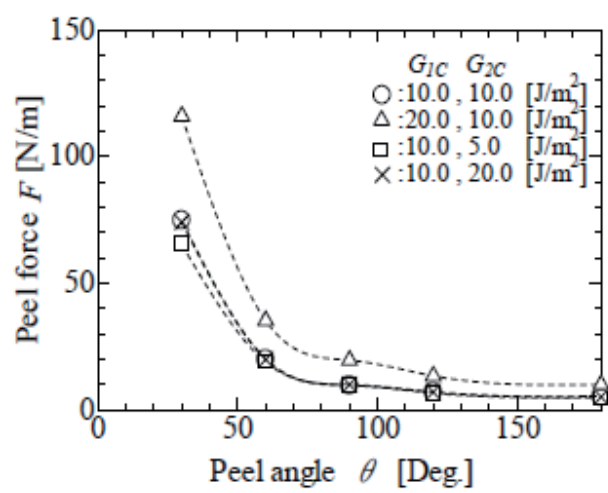


図 5: 定常剥離時の剥離力の角度依存性

実際、参考文献 5 では絆創膏を剥がす場合には、図 6 の右図のように剥がす方向と逆の向きに引っ張ると力が広範囲に及ぶので痛みを伴うので、左図のように剥がす向きに引っ張るのがよいと教えています。

医療用粘着テープは臨床場面において多用され、多くのもとと皮膚の弱い人や乳幼児、高齢者、術後患者にテープによるスキントラブルが見られます。

テープによるスキントラブルの発生機序は、大きく分けて以下の 3 種類のメカニズムに分類されます。

1. 除去反応：テープの剥離に伴う物理的刺激
2. 刺激反応：粘着剤の化学成分による 1 次刺激

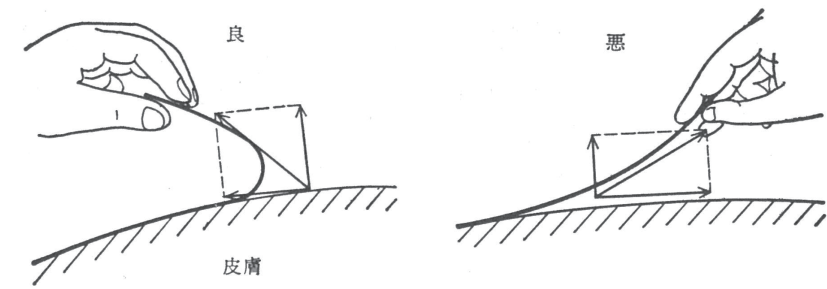


図 6: 絆創膏の剥がし方

3. 過敏反応：アレルギー反応

現在、低刺激性のかぶれにくいテープが開発されており、手術などテープ使用が予定されている患者には、予めパッチテストを実施するなど配慮されるようになっていきます。

しかし、テープによるスキントラブルの原因は除去反応がほとんどであるにもかかわらず、除去反応と刺激反応の判別を行っている施設は少なく、多くの場合、一括りにテープかぶれとみなされています。テープによるスキントラブル防止のためには、除去反応を小さくする看護手技が不可欠と考えられ、一般に、テープは皮膚を押さえながら、平行に折り曲げて、ゆっくり剥がすことが推奨されています。

しかし、その根拠が明らかにされていないため、参考文献7では、健康成人女性10名を対象に、医療用粘着テープを大腿前面に24時間貼付し、テープ剥離時の剥離力、角質細胞剥離量、剥離時の痛み、発赤について調べています。その結果は以下のようなものでした。

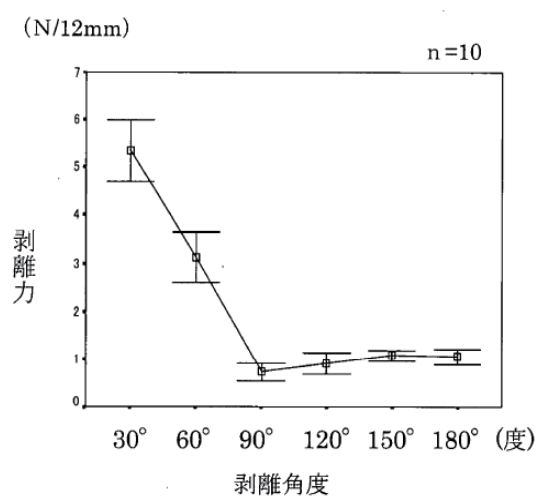


図 7: 剥離力の剥離角度による変化

図7に剥離角度により剥離に必要な力がどのように変わるかを示しています。剥離角度30°で最も剥離力が大きく、最も剥離力が小さかった90°の約7倍になっています。また、剥離角度90°~180°の4群間においては、90°が150°、180°より有意に剥離力が小さくなっています。

表 1: 剥離角度別の痛みの表現（6 人, 重複回答）

痛みの表現	剥離角度					
	30°	60°	90°	120°	150°	180°
痛くない	0	0	5	5	1	1
少し痛い	0	0	1	1	5	3
痛い	6	6	0	0	0	1
この中で一番痛い	4	2	0	0	0	1
ピリピリする	0	0	0	0	0	2
剥がし終わった後も痛い	3	2	0	0	0	0
皮膚が引っ張られるような感じ	3	3	1	1	2	2
テープの剥がし終わりが痛い	0	0	0	0	3	0

テープを剥がす時に, 被験者のうち知識のある看護学生を除いた 6 名が剥離角度により, どのように感じ, 表現したかを表 1 に示してあります. 90° と 120° でのテープ剥離は痛くないと表現したものの多いのに対して, 30° と 60° でのテープ剥離は対象全員が痛いと表現しています.

表 2 は被験者 6 名の剥離角度による発赤の状態の変化を示しています（発赤の状態は測定者 3 名で確認）. 30° と 60° でのテープ剥離では発赤が見られたが, 90°~180° での剥離では, ほとんど見られません.

これらのことから, 参考文献 7 では, 90°~120° でのテープの剥離が剥離力と痛みの軽減につながり, 従来述べられてきた 180° でのテープ剥離は望ましくない可能性があると結論しています.

表 2: 剥離後の発赤状態（6 人）

発赤状態	剥離角度					
	30°	60°	90°	120°	150°	180°
発赤なし	0	1	6	6	6	6
部分的に発赤 すぐに消退	0	2	0	0	0	0
接着面全体に発赤 すぐに消退	6	3	0	0	0	0

参考文献

1. 竹本, 三刀 : 接着の科学, 講談社ブルーバックス
2. Yoshihiro Yamazaki and Akihiko Toda : Dynamical-Morphological Property of Adhesive Tape in Peeling, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 71 (2002) pp. 1618-1621.
3. Katsuhiko Sato and Akihiko Toda : Modeling of the Peeling Process of Pressure-sensitive Adhesive Tapes with the Combination of Maxwell Elements, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 73 (2004) pp. 2135-2141.
4. 山崎義弘, 戸田昭彦 : 粘着テープ剥離の数値モデル, 形の科学会誌, 第 23 巻, 第 2 号, (2008) pp.192-193
5. 増田良太, 井上裕嗣, 岸本喜久雄 : 異方性を考慮した界面結合力モデルによる粘着テープのはく離進展解析, 計算数理工学論文集 Vol.8 (2008 年 11 月) , 論文 No. 05-081128
6. 平田雅子, 松木光子 : 改訂 看護技術の物理学的考察, メヂカルカルフレンド社, pp.96-97
7. 池端三永子, 岡山弥里, 高柳智子 : 皮膚刺激を軽減させる医療用粘着テープの剥離角度の検討, 福井大学医学部研究雑誌, 第 5 巻, 第 1 号・第 2 号合併号 (2004) pp.7-14

講評

この課題はとりつき易かったせいか多くの参加者が解答していました。ほとんどの解答が色々な実験を工夫していましたが, 思考実験(理論的なアプローチ)で挑んでいたものもありました。実験を実施したグループは角度依存性については比較的多くの答案がほぼ正解に到達していました。しかし, 実験の実施回数が1度しか行ってないもの, 再現性が期待できないものはいくつか見られました。

思考実験を行った答案では結論だけでなく, その論理展開の正しさについて評価しました。また, 実験についても結果, 結論だけではなく, 実験計画がしっかりしているもの, 誤差を少なくする工夫をしているものなどを高く評価しました。

解答には, テープの剥がし始める部分と向きについて調べて調べたものやテープの形状に工夫をしたものなどがありました。この課題ではこの観点での解答を求めるものではありませんでしたが, この観点は非常に大切です。最近, 久光製薬の「のびのびサロンシップ」が「丸かど」にして服にこすれても剥がれにくくなったとテレビでコマーシャルしているように形, 力がかかる方向も重要な要因になります。この観点でのアプローチも評価しましたが, 残念ながら, システムティックな実験になっていなかったこと, 普遍的結論に達していなかったため高い評価にはなりませんでした。

3 課題3

課題

50 年位前、昭和の中ごろまでは、小学生の正月の外での遊びの代表は、凧揚げ、コマ回し、羽子板でした。そのころの小学生はよく揚がる凧を工夫したものです。しかし、よく揚がる凧とはどのような凧のことなのでしょうか。そこで、「よく揚がる凧」の定義を考え、その定義を満たす凧を作ることを考えてください。

解説

空を飛ぶ、あるいは空中に滞在する装置として、航空機、滑空機、落下傘、凧などがある。このうち、航空機は動力を持ち、狭い意味での滑空機は動力を持たない。落下傘は降下時の着地衝撃を和らげるために利用される。凧は索によって曳航のまま飛行する。索で曳航されているが、ある程度の領域を動ける。航空機の開発にあたって、凧を使った揚力による地上からの浮き上がりや、滑空機による航空力学の研究がなされてきた。航空機や滑空機は、翼の上面と下面との空気流の圧力差から生じる揚力によって空中を行う。凧も同様に前後の面に流れる空気流の圧力差によって揚力を受けて飛行する。しかし、凧は曳航索によって曳かれている。そのことから、航空機の翼の仰角に比べて、凧の仰角は通常大きくなる。

「良く揚がる凧」を設計するためには、まず、揚がることを定義し、そして、その定義なかで、「良く」を解析することになる。

「揚がる」の定義を、たとえば、

「凧の動力となる風が弱くても揚げることができる。」とする。

次に、「良く」を安定にと解釈すれば、「良く揚がる凧」とは

「楽に揚げられ、空中で安定している凧。」

と解釈することができる。したがって、凧の面積が大きくなれば、揚力を得られることから、面積を大きくすればよいことになる。

凧の左右の端から剥離する空気の流れから後方下向きに乱流が発生し、凧が揺れ飛行が不安定になることが推測される。すなわち、凧の飛行姿勢を安定にする必要があることがわかる。そこで、凧を縦長の短形にすることで安定性を上げることが行われる。さらに、凧の重心位置を調整するために、重りを付けることと、糸目の調整によって凧の重心を下に移動することを行う共に、左右のバランスを取る必要がある。そのために、短形の和凧では、索から糸目を分け、複数の点に曳航索を凧に結びつける必要がある。また、揚力を得るために前（操縦者の方向）に膨らみ持たせる必要がある。一方、和凧でも鳶や奴は、横に広がる羽や手に相当する部分が飛行機の翼に近い働きをするため、安定と引き換えに操縦性能が上がる。従って、良く揚がる和凧を作るには、縦長の短形にし、重りと糸目を調整して凧にあった重心を設定する必要がある。

「良く揚がる」に関して、ほかの定義を考えることも可能である。例えば、喧嘩凧のように

「操縦性能が高い。」

を良く揚がると定義すれば, 航空機の翼に似た形態にする必要がある. 和風の場合は正方形や横長短形にする必要があるが, 揚げるのが難しくなる. 初心者には, 鳶風がうまく上げられないことがこの現象に相当する. 喧嘩風を操るのに熟練を要することの一因とも考えることができる. 洋風の場合は, 三角形や菱形をしており, 仰角が大きくなり, より滑空機に近い飛行となる.

各自が定義をし, その定義にあった解析をしていることを評価した. また, 飛行体の運動の基礎となる航空力学について, 定性的であるが的確に解析した解答を評価した.

参考文献

1. NASA のホームページ <http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/shortk.html>
2. 東 昭, 模型飛行機と風の科学, 電波実験社: 第 2 版 (1998)
3. 森 照茂, 電波実験社: 増補改訂版 (1979)

4 課題 4

課題

点の集合と点同士とを結ぶ辺の集合とからなる図形をグラフと呼びます。以下では、立方体 (cube) の頂点と辺からなるグラフを一般化して出来るグラフの性質を考察します。正方形は 2 次元の立方体なので 2-cube と呼ばれます。立方体は 3-cube です。数学では次元の低い方にも一般化を行います。2 点と 2 点を結ぶ直線からなるグラフは 1-cube です。n-cube は n 次元ユークリッド空間の超立方体の頂点と辺とからなるグラフです。n-cube に関して以下の問に答えなさい。

問 1 全ての辺の長さを 1 とします。ある点を 1 度だけ通過して点と点をつなぐ辺を辿り、異なる 2 点を結ぶ経路をパスと呼びます。あるグラフの上で、任意の 2 点 x, y を結ぶパス $p(x, y)$ の中でその長さ $|p(x, y)|$ の最小値 $|p(x, y)|^*$ を点 x, y の距離と呼びます。グラフ上で $|p(x, y)|^*$ の最大値をグラフの直径と呼びます。n-cube の直径を n の式で表しなさい。

問 2 点の位置や辺の長さを自在に変えて曲線も許すとき、辺が交わらないように平面に作図可能なグラフを平面グラフと呼びます。2-cube, 3-cube は平面グラフですが、4-cube はそうではありません。平面に描けないグラフを平面に描ける幾つかの部分に分解することができます。このとき、分解の最小数をグラフの厚さと呼びます。n-cube の厚さを n の式で表しなさい。

解説

以下は課題の最初の表現である。

問 1 4-cube の頂点の数と辺の数を答えなさい。

問 2 n-cube は n 次元ユークリッド空間の超立方体の頂点と辺とからなるグラフです。n-cube の点と辺の数を n の式で表しなさい。

問 3 平面に直交座標を考えると、単位正方形の頂点を $(0, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 1)$ $(1, 0)$ に表すことができます。座標から括弧をとると 00,01,10,11 なる 2 進数が頂点に対応することがわかります。さらに、1-cube の 2 つの点が、1 桁の 2 進数 0, 1 に対応します。

この性質を一般化して、n-cube の頂点の 2 進数による表現を考えなさい。

問 4 辺の長さを 1 とする。ある点を 1 度だけ通過して点と点をつなぐ辺をたどって、異なる 2 点を結ぶ経路をパスと呼びます。

あるグラフの上で、任意の 2 点 x, y を結ぶパス $p(x, y)$ の中でその長さ $|p(x, y)|$ の最小値 $|p(x, y)|^*$ を点 x, y の距離と呼びます。例えば、2-cube の上で、頂点 00, 01 の間の距離は 1 であり、頂点 00, 11 の間の距離は 2 です。

n-cube の点間の距離の平均値を求めなさい。

問5 グラフ上で $|p(x, y)|^*$ の最大値をグラフの直径と呼びます.

n -cube の直径を n の式で表しなさい.

問6 問3 で考えた n -cube の頂点の2進数表示と直径の関係を考察しなさい.

問7 点の位置や辺の長さを自在に変えて曲線も許すとき, 辺が交わらないように平面に作図可能なグラフを平面グラフと呼びます. 2-cube, 3-cube は平面グラフですが, 4-cube はそうではありません.

平面に描けないグラフを幾つかの部分に分解するとことを考えます. このとき, 分解の最小数をグラフの厚さと呼びます.

4-cube の厚さを答えなさい.

問8 n -cube の厚さを n の式で表しなさい.

問7 まで進めると, 直径は n であることが分かる. 一方, 厚さは難しく

$$t(n) = \left\lceil \frac{n+1}{4} \right\rceil$$

である. ただし,

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbf{Z} | x \leq n\}$$

であり, 実数 x 以上の最小の整数を表している.

辺の交差なしに平面に描けるグラフを, 平面グラフという. 球面上の点と平面の点とが1対1に対応することから球面上に描かれたグラフは平面に描けることになる. 立方体の頂点と辺からなる 3-cube は球面上に描くことができるため, その厚さは1である. しかし, 4-cube は4次元立方体の頂点は球面に描くことはできない.

グラフは点(頂点)と、点を結ぶ線分(辺)とを扱う分野である. 場合によっては, 辺に重みを考えることがある. グラフは電気回路やネットワークの性質を記述し, 解析する基本的な手段となり, 現代数学では重要な分野である. 例えば, 検索で現れる項目の順序を与えるページランキング (Page Ranking) は, インターネット上の項目間にはられた Link の成すグラフの上の酔歩 (Random Walk) を利用した Google 行列の固有ベクトルとして定義される.

課題で取り扱ったグラフは n -cube あるいは hypercube と呼ばれるグラフであり, n 次元立方体の頂点と辺からなるグラフである. 各点を計算機と考え並列計算機の CPU 間の通信機構として利用されることがある. n -cube の一部を利用すると, 並列計算において基本的な CPU 間の通信構造を構成することが可能である. このとき, 最も離れた CPU 間の距離が n -cube の直径で.

座標軸の方法を hypercube に適用すると, グラフの分解と合成を考えることができる. Q_n を頂点が n 個の hypercube とすると,

$$Q_{n+1} = K_2 \times Q_n$$

と表現することができる. ここで, K_2 は2つの頂点を1つの辺で結んだグラフである.

グラフ G, H に対してその直積グラフ $G \times H$ は以下のようにして構成される.

- $G \times H$ の頂点: $V(G \times H) = \{(u, v) | u \in G, v \in H\}$
- $G \times H$ の辺: $E(G \times H) = \{(\overline{(u, v)(u, w)}) | \overline{vw} \in E(H)\} \cup \{(\overline{(u, v)(w, v)}) | \overline{uw} \in E(G)\}$

ただし, $V(G)$ はグラフ G の頂点の集合であり, $E(G)$ はグラフ G の辺の集合である. さらに $\overline{ab}$ は頂点 a , b を結ぶ辺を表している. この関係を利用すると, 以下の関係を得る.

$$Q_{n+1} = K_2^n = Q_3 \times Q_{n-2}$$

K_2^3 は平面グラフであるが, $K_2^4 = Q_4$ は平面グラフではない. Q_{4n-1} を n 個の平面グラフに分解できることから (Kleinert(1967)), $t(n) = \lceil \frac{n+1}{4} \rceil$ を得る.

グラフの頂点と頂点を結ぶ辺が存在するとき 1, 存在しないとき 0 とすると, グラフを表で表すことができる. この表を接続行列という. 例えば, 表 3 は正 5 角形の辺と, すべての対角線を辺とするグラフである. ここで, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ は頂点の番号である. このようなグラフを次数 5 の完全グラフという.

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0

表 3: 完全グラフ K_5 の接続行列

また, 表 4 によって決まるグラフでは, 頂点の集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を 2 つの集合 $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $V_2 = \{4, 5, 6\}$ に分けたとき, V_1 , V_2 の中では頂点同士は辺で結ばれておらず, V_1 の 1 つの頂点が V_2 のすべての頂点に辺で結ばれている. V_2 の 1 つの頂点と V_1 の間には逆の関係が成立している. このようなグラフ $K_{3,3}$ を次数 (3, 3) の完全 2 部グラフとよぶ.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0

表 4: 2 部グラフ $K_{3,3}$ の接続行列

辺の交差なしに平面に描けるグラフに対して次のクラトフスキーの定理が知られている。

定理

グラフ G が平面に描けるためには, G がその一部に K_5 , $K_{3,3}$ を含まないことである.

電気回路を基盤に起こすとき, 何枚の基盤が必要かが回路を記述するグラフの厚さからわかることになる.

上に述べた 7 つの問と同様な考え方で n -cube を取り扱った解答を評価しました.

参考文献

1. M. Kleinert, Die Dicke des n -dimensionalen Wiirfel-Graphen. J. Combin. Theory 3, 10-15 (1967)
2. A. N. Langville and C. Meyer, Google's PageRank and Beyond, Princeton University Press (2006)

5 ロボットの部

本年度より, K-Junior を使ってロボットの部を再開しました. 参加者, 補助の学生, 課題作成者が評価し, 命令が正確に実現されている課題が選ばれました.