第 17 回数理科学コンクール課題解説

平成 26 年 11 月 3 日 千葉大学先進科学センター

目 次

はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 15 回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

   試験時間は 6 時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.

2. たのしい物理・数学の発見

   物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

   様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.

4. 人材の育成

   コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去 16 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 17 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます.

課題作成者

千葉大学教授　井宮　淳
東京慈恵会医科大学教授　植田　毅
(五十音順)

平成 26 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 26 年 7 月 12 日と 13 日に開催しました第 16 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰するこを決定しました.

第 17 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞	武田 智 中村梨久
	岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希
	池田知徳 小幡純也 中田 希
銀欅賞	高木康太
	永田聡志
	河野翔太 積田嘉海
	篠崎 竜 桑葉秀一 小野裕昭
	中　美帆 利根川理秀 渡辺星之進
	工藤拓翔 小橋龍人 神　宗一郎
	柳楽大樹 久保田優作
学長賞	野中大輝
	澤田亮 伊藤誠敏 古來壮汰
	布施和華子 日吉まゆ 古野明日香
機巧賞	松本伊吹 小苗代淳平

課題	参加者名
1	篠崎 竜 桑葉秀一 小野裕昭
	柳楽大樹 久保田優作
2	高木康太
	永田聡志
	武田 智 中村梨久
	岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希
	河野翔太 積田嘉海
	工藤拓翔 小橋龍人 神　宗一郎
	池田知徳 小幡純也 中田 希
3	野中大輝
	武田 智 中村梨久
	澤田亮 伊藤誠敏 古來壮汰
	岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希
	中　美帆 利根川理秀 渡辺星之進
	池田知徳 小幡純也 中田 希
	布施和華子 日吉まゆ 古野明日香
4	布施和華子 日吉まゆ 古野明日香

千葉大学先進科学センター長
教授 橋本健也

1 課題 1

課題

現象や物事を感覚的ではなく科学にするためには, 位置や質量, 力などを数字として定義する必要があります. 数学的にできなければ予測などもできません. 以下の示す図はそれぞれ異なった条件で時間とともに成長する結晶の形です.

我々はそれぞれ異なる形として感じるがそれぞれの形の違いを一つの数字で表すにはどうすればよいでしょうか？例えば, 枝の付き方がどうなっているという細かな構造ではなく, 大局的な構造の違いを表現する方法を考えてください.

解説

この課題は出題者（植田）が修士課程の大学院生のときに直面したものです．当時，コンピュータシミュレーションで結晶が成長するとき，成長速度と形，大きさの関係の研究をしていましたが，結晶の形がどのように変化しているのか，人がいちいち見なくても，コンピュータの中にあるデータから形がどのように変化しているのかを知る必要があったのです.

そもそも，形を一つの数字で表すのは無理な話なのですが... しかし，科学的に形を比較するときには何がしかの数値にして比較する必要があります.

樹枝状の構造を表すために以前からフラクタル次元と言うものが用いられてきました．それは以下のように定義されます.

図形が N 個の小さな正方形でできているとします．その正方形に順番を付け，i 番目の正方形の中心までの距離を r_i として，図形の広がりの程度を表す回転半径を

$$R_g^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i^2$$

で定義して，

$$N \propto R_g^{D_f}$$

とするとき，このベキの D_f をフラクタル次元と呼びます．フラクタル次元はいわゆるフラクタル（自己相似）な図形である樹枝状の形ではおよそ 1.7 となる．問題文の図形では正方形に近い場合は 2，樹枝状のでは 1.73 ほどになり，また枝が細く緻密に詰まった複雑な構造の場合になると 2 となるので，図 2 のように $2 \sim 1.7 \sim 2$ と変化します.

問題文の図形はそれぞれ図 2 の $|\mu_s/T| = 5, 9, 10, 12, \infty$ に対応します．つまり，フラクタル次元が 2 に近い時には 2 種類の構造があり，それらは区別がつかないことになります.

そこで，このような場合にも区別がつく指標を考える必要があります.

まず，同じ面積の正方形と円を比較，また，同じ円周の円と円を 4 等分して内側に折り返した図形 (図 4) を比較すると，もちろん，面積だけ，周囲の長さだけでは区別ができないことが分かります．形を区

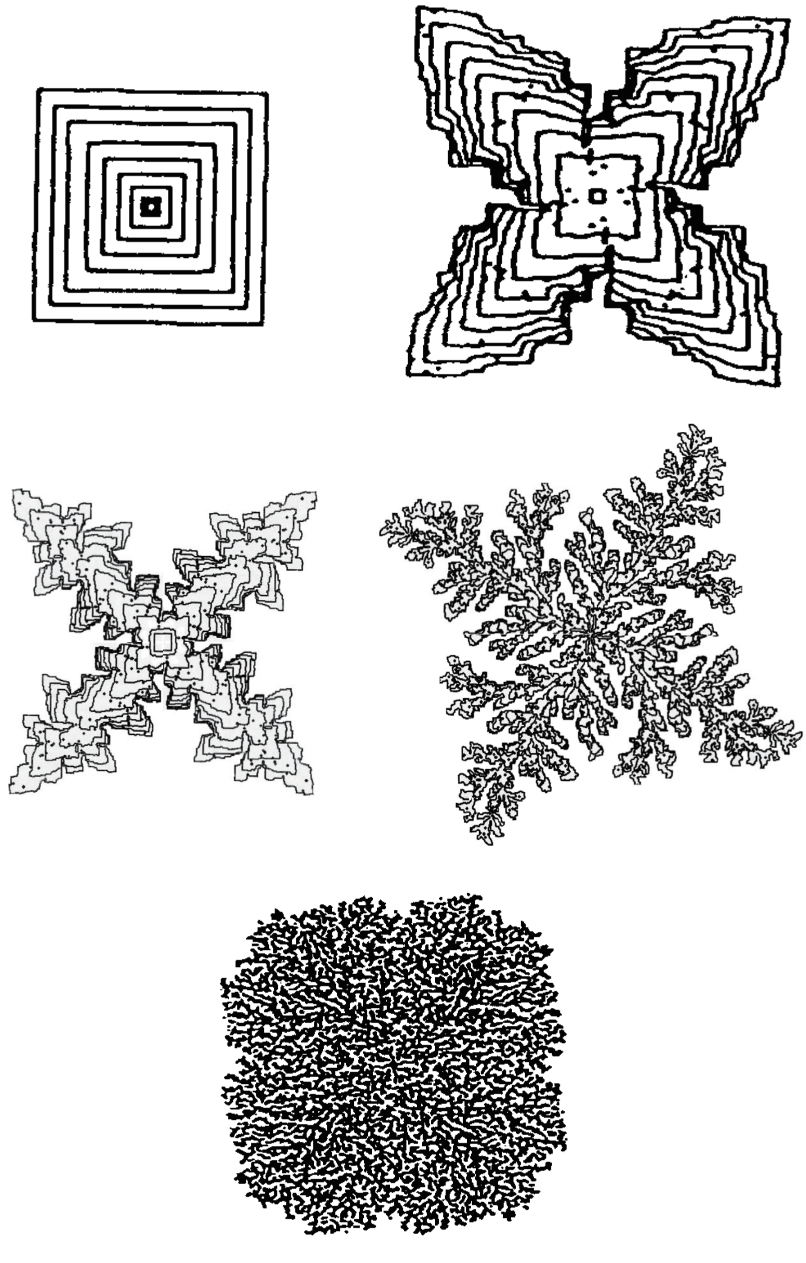

図 1: さまざまな結晶の成長形

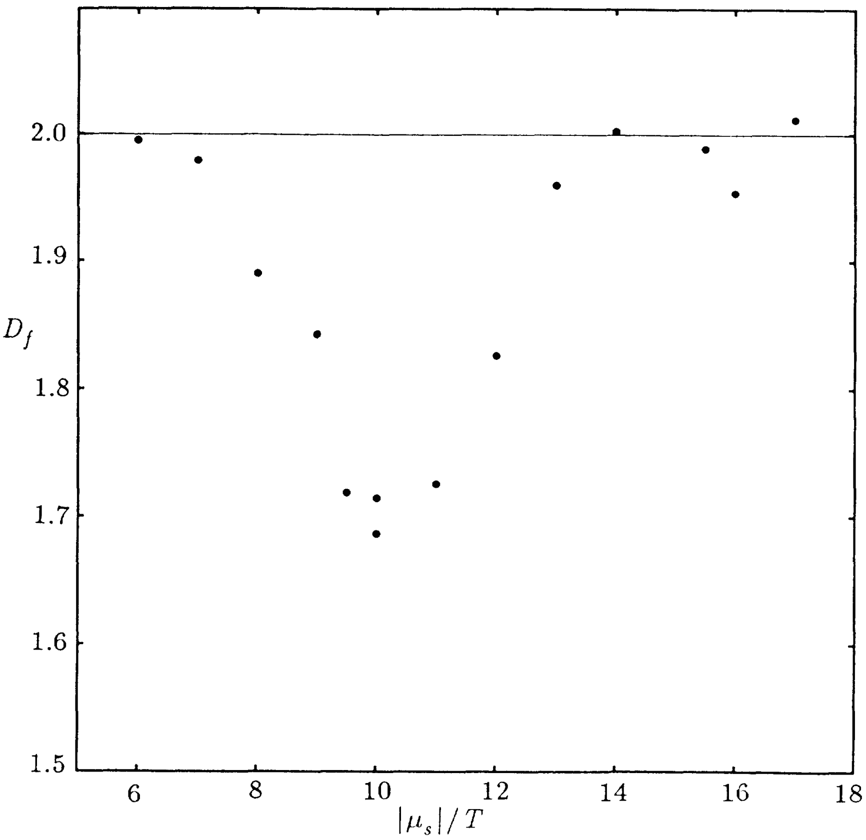

図 2: 結晶の成長速度によるフラクタル次元の変化. Y. Saito and T. Ueta, Phys. Rev. A, Vol.40, (1989) pp.3408-3419 より.

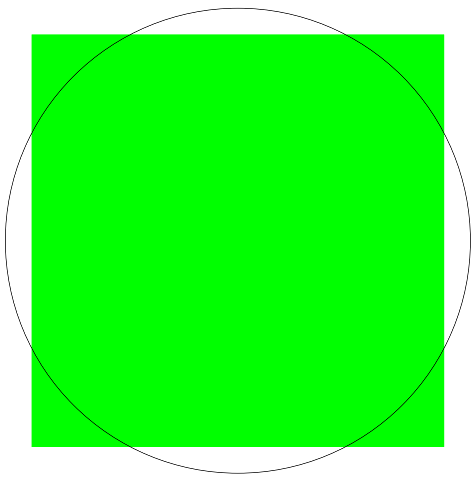

図 3: 円と面積が同じ正方形

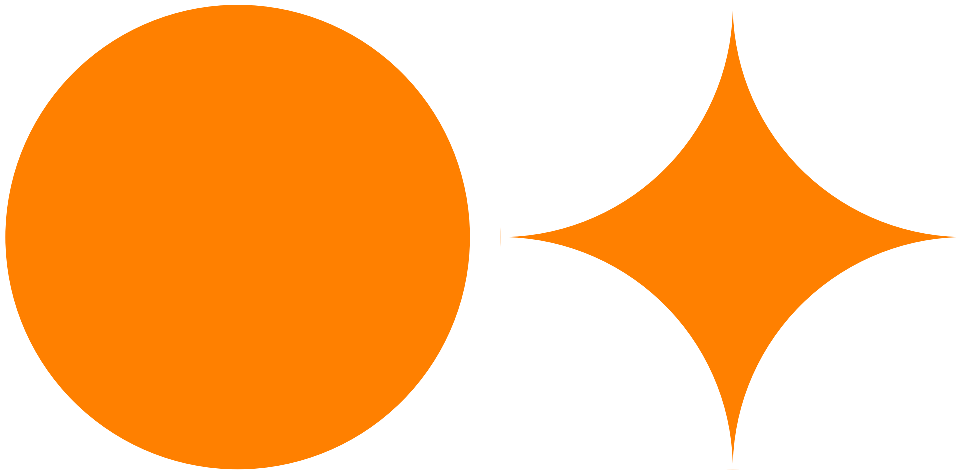

図 4: 円と周長が等しい折り返し図形

別するためには少なくとも面積と周囲の長さ（3 次元なら体積と表面積）両方を考慮しないといけないことが分かります．これらの図形だと面積を S，周囲の長さを L とすると

$$\begin{aligned} \text{正方形} &: \quad L = 2\sqrt{S} \\ \text{円} &: \quad L = \sqrt{4\pi}\sqrt{S} \end{aligned}$$

円を 4 分割して内側に折り返した図形の場合，$L = \sqrt{(4\pi - 2)/(4 - \pi)}\sqrt{S}$ で 2 次元の図形なので周囲の長さは $\sqrt{S} = s^{\frac{1}{2}}$ に比例していて，比例係数だけの違いになります．

逆に，非常に複雑な図形ではどうか？図形が小さな正方形（結晶を構成している原子に相当）でできているとすると，問題文の最後の図形のように枝が非常に細くて複雑な場合，全ての正方形が全て外に露出していて，他の正方形に囲まれる正方形がなくなります．このとき，小さな正方形の１辺の長さを l として，正方形 N 個でできているとするとこの図形の面積は $S = Nl^2$ で周囲の長さは左右両面考えておおよそ $L = 2Nl$ と見積もれるので，$L = (2/l)S$ (l を定数とみて)L は S に比例します．すなわち，１次元的な形であることが分かります．このようにみると，円や正方形からクモヒトデのような形まで，面積と周囲の長さは

$$L = a \times S^{\alpha}$$

(a, α はその形固有の定数) と書けて，四角か丸かという変化は係数 a が表し，大局的な構造の違いは L のベキ α が表しています．これを使うと，問題文にあった図形は $1/2 \sim 1$ へと変化します (図 5)．問題文の図形はそれぞれ図 5 の $|\mu_s/T| = 5, 9, 10, 12, \infty$ に対応します．これで全ての図形が区別できるようになりました．

講評

なかなかとらえどころがなく苦戦した様子でした．

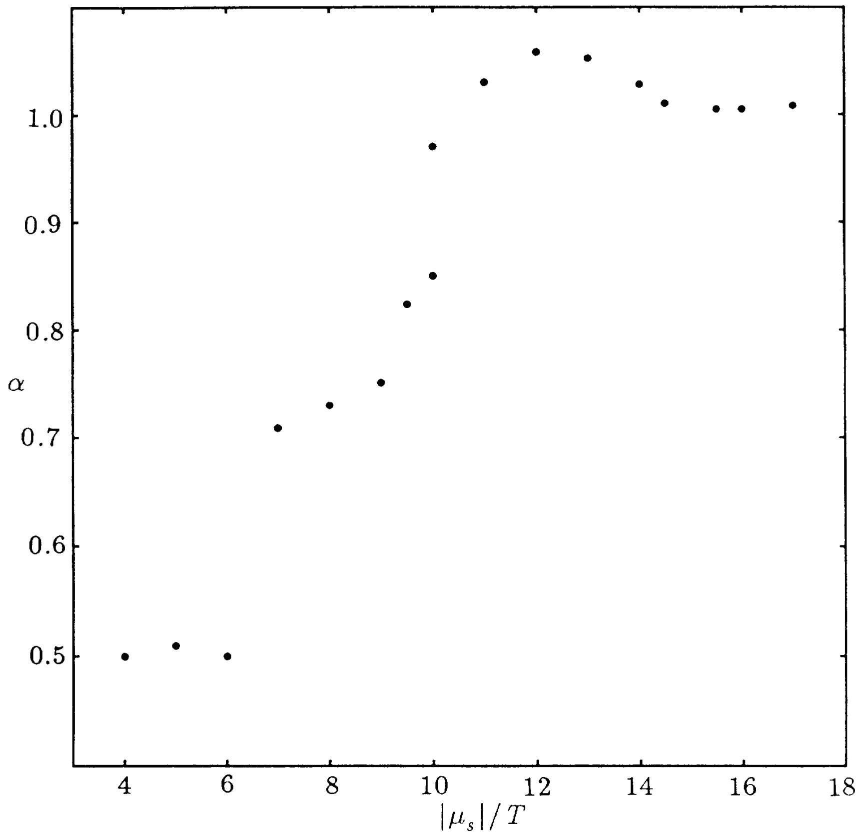

図 5: 結晶の成長速度による指数 α の変化. Y. Saito and T. Ueta, Phys. Rev. A, Vol.40, (1989) pp.3408-3419 より.

枝分かれに注目して，根元からたどり順に枝分かれに桁を対応させ，枝分かれの本数をその桁に書き込む方法で表現しようとした試みがありました．一つのアイデアではありますが，この方法では図を見て人間が判断して数値に変換することになります．多数の形を数値化する場合にはコンピュータで数値化できるようにしなければなりません．また，末端の枝先からたどってそれを数値で表現はできますが，全ての枝や全体の形，つまり，枝が太いのか細いのか，密に詰まっているのか，隙間が多いのかなどが表現できません．フラクタル次元と言う言葉を使った解答もありました．そこまでは来るかと思ったのですが，実は最後の黒抜きの複雑な形はフラクタル次元では区別できない形なのです．周囲の距離に注目しているものもありました．正方形と長方形，円の区別もつき，枝分かれの構造が密になっている場合と疎になっている場合の区別ができる可能性がある方法を高く評価しました．

2　課題 2

課題

アメリカのスペースシャトル, チャレンジャー号は 1986 年 1 月 22 日にフロリダ州ケネディ宇宙センターから発射されるはずでした．しかし, 修理や風が強かったため 3 回も打上延期となり, 当初の予定から 6 日も遅れていました．NASA のチャレンジャー号による宇宙開発計画は 1981 年の 4 月に始まり, これまで 24 回の打ち上げに成功しています．シャトルの打ち上げはもはや恒例行事と化し, シャトル計画への国民の関心は薄れ, その「プロジェクトを通じて科学の技術進歩を加速する」という本来の目的は忘れかけられていました．しかし, この打ち上げは, レーガン大統領が「民間人を宇宙へ」と提唱し, 高校教師のクリスタ・マコーリフが宇宙から授業を行うことになったため, 再び注目を集めていました．

スペースシャトルは打ち上げ時, メインロケット以外に NASA の提携企業モートン・サイアコール社製の固形ロケット・ブースター (SRB) を 2 基装着し, 時速 5700 キロまで加速される．SRB は成層圏に達した後は切り離されてパラシュートで海に落下する．値段は 2 基で 5000 万ドル．SRB は利便性から部品のまま鉄道で輸送され, 宇宙センターで組み立てられます．それぞれの部品には, 打ち上げ時の衝撃を吸収し, 内部の高温のガスが外に漏れないように密封するため, 2 本の樹脂製の O リング（O-ring, オーリング）が装着されています．

1 月 27 日, やっと翌 28 日の打上が決定されましたが, 28 日の気温は氷点下になると予報されていました．SRB を開発したモートン・サイアコール社のエンジニアであるロジャー・ボジョレーには不安がよぎりました．というのは, 1985 年 1 月の打ち上げ時, 回収された SRB の O リングから, ガスの流出が確認されていたからです．予備の O リング（2 本のうちの一つ）が機能したため大事には至っていませんでした．しかし, 明日の気温は氷点下で, 予備の O リングまでもが破損すれば大惨事を招く恐れがある．「絶対に打ち上げは避けるべきだ」と感じていました．

しかし, 1985 年 10 月の打ち上げのときには, 気温は高くてもガス流出は起きているし, スペースシャトルの打上中止基準に風速は含まれているが, 気温は含まれていません．打ち上げ時の気温と SRB 破損の有無をまとめると以下の表 1 のようになります．

さて, この表のデータに基づいて打ち上げについてどのように判断すべきか科学的に考えてください．

解説

この課題は統計学の問題です．実際，この課題は以下の本の原稿を元に作りました．本が出版されるまでに，出版社から例を全て医療系のものにして欲しいとのことで，この話題は差し替えられてしまいました．統計学は偏差値，当選確率の計算，待ち時間の計算だけでなく，事故の予測などにも用いられ，薬が効くかどうか，伝染病が蔓延するのかそのまま収束するのかの判断も統計的に判断されます．そう言う意味で，数学とは無縁そうな医者にも統計学の素養が重要になります．実際，千葉大学医学部の 1 年生は統計学をみっちりと勉強しています．統計学の知識がいい加減だと，ノバルティスファーマの降圧剤ディオバンの論文データ改竄事件のように，製薬会社社員に統計処理を任せることになってしまいます．

ID	気温 [℃]	破損の有無
16	22	無
8	24	有
11	19	無
13	19	無
20	25	無
6	18	有
4	14	有
15	21	無
19	24	無
22	26	無
23	27	無
2	12	有
3	12	有
12	19	無
14	20	無
17	22	無
5	14	有
1	12	有
10	18	無
18	23	無
21	25	無
7	21	有
24	28	無
9	24	有

表 1: 打ち上げ時の気温と SRB 破損の有無

さて，やるべきことは，今までの気温とOリング異常との関係を示すデータを解析し，摂氏0度のときの事故発生確率を計算することです．計算そのものは難しいのでデータをどのように処理し，何を推定するかを期待していました．

まず，与えられたデータをグラフにするところから，何が起こっているのか，状況把握が始まります．示されたデータは12 ℃が最も基本の低い例で，気温0 ℃はデータの範囲にないので，データの範囲外のものを推定することになります．そのような，作業を外挿といいます．外挿はデータ範囲の推定をする内挿よりも難しく，結果の確からしさも下がります．

Oリングに異常があった頻度をグラフにすると以下の図6のようになります．これを見ると，12, 14

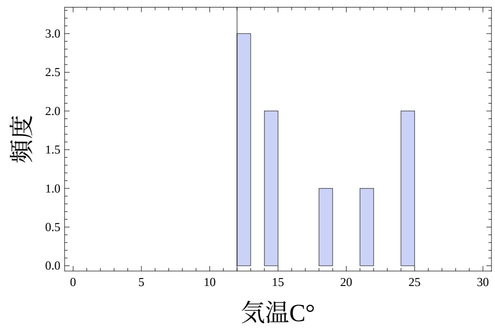

図 6: Oリングに異常があった頻度の温度変化

℃で頻度が高いですが，24 ℃でも頻度が高く，どのような傾向にあるのか分かりません．また，この図を見るときに注意が必要なのは，縦軸は確率ではないので元々のデータ（異常がある場合，ない場合両方の）が多いか少ないかによって頻度も変わるということです．示されている全てのデータ，つまり，各温度ごとのシャトルの打ち上げ頻度を示すと図7のようになります．全ての温度で同じ頻度ではないので注意が必要です．

では，頻度を無視してそれぞれの温度で事故が起こっているかどうかをグラフにすると図8のように

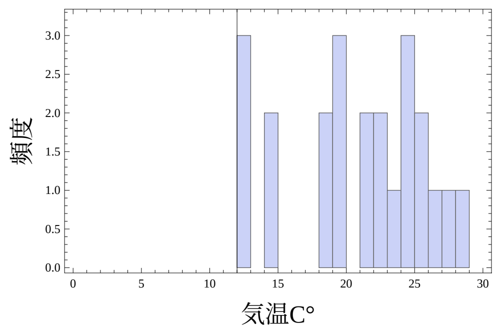

図 7: 各温度でのスペースシャトル打ち上げの頻度

なります．18 ℃から 24 ℃は異常があることもないこともあることが分かります．結局，どの温度でも

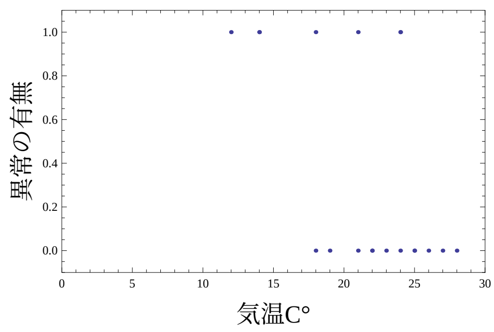

図 8: 各温度でのＯリングに異常の有無

危険はあるじゃないかと言いたくなります．

しかし，これは異常があった頻度を考慮していないので，各温度で打ち上げ回数に対する以上のあった回数の割合（異常のあった確率）をグラフにすると図 9 のようになります．これを見ると，どうやら

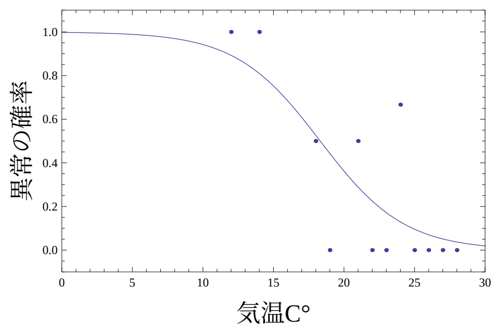

図 9: 各温度でのＯリングに異常のあった確率

19 ℃付近で異常があるかないかが移り変わっているように思われます．統計学ではこのグラフを

$$p = \frac{1}{1 + e^{-a-bT}}$$

（T は温度で,a, b は定数．e は高校で習う自然対数の底で，2.71828 と言う数値である）で表されるロジスティック曲線という曲線に当てはめ，定数 a, b を決定し，データの無い温度での確率を推定します．ロジスティック曲線は人口動態シミュレーションや電子がある量子状態をとる確率（フェルミ分布関数）など様々な場面に登場します.

さて，この場合にフィッティングすると，$a = 6.152805, b = -0.33596139$ となり，グラフは図 9 の実線のようになります．これから,

$$p = \frac{1}{1 + e^{-6.152805+0.33596139T}}$$

となり，T=0 とすると，0 ℃における異常が発生する確率が $p = 0.997877$ と求まります．ほぼ確実に異常が起こることが分かります.

統計学を無視して，結局，サイアコール社は 28 日の打上に go サインを提示することになります．1986 年 1 月 28 日北米東部標準時午前 11 時 39 分，チャレンジャー号はフロリダ州ケネディ宇宙センターから発射されました．高度 5800 メートル，音速を突破，3 基のエンジンの出力を 65 %にまで下げ，船体への負荷が最大となる地点を通過する．高度 1 万 5000 メートル，再び出力を最大に戻す．エンジンは出力を 104 %にあげる．その直後爆発.....

統計学に基づいた，製品，運行管理の重要性を理解してください.

講評

多くの答案で与えられたデータを度数分布のグラフにしていました．そこから先の処理はなかなか難しいので，多岐にわたった推定，考察がなされていました．統計学の処理に近い計算を行っていた答案も見られました．推定までの論理的思考が正しく一貫しているものを高く評価しました.

3 課題 3

課題

船は鉄でできています．そのため船体は磁化しています．磁化した船は, 機雷の誘発を招くため海軍では船の消磁が重要な問題となってきました．現在では, 船にも多くの電子機器が艤装されています．そのため商船でも消磁は重要な問題となります．船の磁化を消去する方法を考えてください．

解説

磁性体とは磁場をかけると磁気を生じる物質であり, 反磁性, 常磁性, 強磁性の 3 種類の磁性体が存在します．強磁性体は磁場をかけて磁化させた後に磁場を取り除いた後も分極が残り永久磁石となる残留磁化と呼ばれる現象であり, 室温で強磁性を示す単体の物質として, 鉄, ニッケル, が代表的な金属です．常磁性とは, 外部磁場が無いときには磁化を持たず, 磁場を印加するとその方向に弱く磁化する磁性を指します．磁場をかけたとき, 物質が磁場の逆向きに磁化され, 磁場とその勾配の積に比例する力が, 磁石に反発する方向に生ずる磁性のこを反磁性と呼びます．ビスマスとアンチモンが代表的です．

量子力学的には多くの原子が 2 つずつ対となる電子を電子軌道に留めています．これら, 対となる電子はその各電子のスピンをそれぞれの電子がお互いに打ち消しあうために, 外部から見て磁気は発生しません．より重い原子では, 不対電子があるために磁性が生じている場合が多く存在します．鉄がその典型です．

強磁性体では隣り合った原子の間に磁気モーメントの向きをそろえようとする相互作用が働いています．そのため, 各原子の磁気モーメントの向きが自発的にそろい, 磁場をかけなくても磁化をちます．これを自発磁化といいます．この磁気モーメントがそろっている領域は光学顕微鏡で確認できる程度の大きさであり磁区と呼ばれます．磁区と磁区の間は磁壁という徐々に自発磁化の向きが移り変わる領域で隔てられています．物質内のそれぞれの磁区の持つ磁化の向きはランダムに異なっているため, 磁場をかける前の状態では, 磁化は物質全体で見ると 0 になっています．

磁場をかけると磁場に沿った磁化を持つ磁区が拡大し, それ以外の磁区が縮小するように磁壁が移動する．その結果磁場に沿った磁化が打ち消されなくなり, 物質全体として見ても磁化が生じます．ある程度より強い磁場をかけると物質内がただ 1 つの磁区となるため, それ以上磁化が増えなくなる．この時の磁化を飽和磁化といいます．

強磁性体の単一磁区を壊して, 磁化前のもとの状態に戻せば, 強磁性体物質を消磁できます．磁化した物質を消磁するには一定方向を指すように並んだ磁区を何らかの方法でランダムにして, もとの磁化していない状態に戻せばよいことになります．例えば以下の方法が考えられます．

- 加熱する．
- 振動を加える．
- 逆向きの磁場の中に置く．

船体に熱を加えることは現実的ではありません. また, 大規模構造物に振動を加えることも現実的ではありません. 従って, 磁場を使って消磁することになります. さらに, 磁場を使った消磁の方法は 2 つの方法が考えられます.

- 常に逆の磁場を発生させる装置を船体に取り付ける.
- 船体全体をを磁石と考え, 逆磁場の中に船体を置く.

実際には, 最後の方法が選択されます. 大きなコイルの中に船体を置き, 交流の強さを徐々に小さくし磁場を零に減少させることを行います.

機雷が戦争に使われ始めた初期には, 船に磁場発生装置を取り付けることも行われてきました. また, 船体の振動で磁化が小さくなっていくことも知られていました. 現在でも, 船体の周りにコイルを巻き付け, 船体コイルに電気を通電し消磁することも行われます.

磁場は目に見えませんが身近な現象です. また, 磁石は玩具からモーターまで現在の生活では至る所にあります. 携帯電話発生する磁場によって腕時計を磁化させてしまったことがあるかもしれません. 現在では, 大型船舶はコンピュータによって操船されます. さらに, レーダーなどコンピュータが組み込まれた多数の電子機器を装備しています. 従って, 商船でも消磁は重要な問題となっています.

磁気や磁場なしに情報通信は成り立ちませんが, 逆に気を付けないと情報や機器を破損させてしまうことがあります. また, 消磁を利用すれば, 情報を復元不可能にし, 電子的な秘密情報を完全に廃棄することできます. うまく利用すれらば, 安全・安心な社会の基盤技術となります. 磁気や磁石の性質を理解し, その利用法を考えた解答を評価しました.

講評

コンクール当日発信機とコイルを用意したのは交流による消磁を想定したためです. 振動を加える方法, 船体を電磁石にする方法など, 物理的に正しい考察, 工学的に実現可能な方法を評価しました.

4 課題 4

課題

$a^2+b^2=c^2$,$(a<b)$ を満たす零ではない互いに素な正の整数の組をピタゴラス数という．$(3,4,5)$, $(5,12,13)$ が例です.

m, n を整数とすると, $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ によってピタゴラス数が生成されることが知られています.

1. ピタゴラス数は無数に存在します．そこで, ピタゴラス数の間に成立する関係を調べてください.

   ヒント: 整数 m, n から構成される有理数を $t=\frac{n}{m}$ とする.

   $$x=\frac{2t}{1+t^2},\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

   で決まる原点を中心とする単位円上の点を単位有理点と呼ぶことにします．有理点の性質を利用できます.

2. $(3,7,5)$, $(7,8,13)$ は $a^2+bc+b^2=c^2$ を満たす互いに素な自然数である．$a^2+ab+b^2=c^2$ を満たす 3 つの整数の組の間に成り立つ関係を調べてください.

   ヒント: 有理点の構造を考えてください.

3. $a^2-bc+b^2=c^2$ を満たす 3 つの整数の組の間に成り立つ関係を調べてください.

4. $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たす 4 つの整数の組ではどのような性質が成り立つか考えてくださ.

   ヒント: 平面上の点 (X,Y) は原点を中心とする球面上の点と

   $$x=\frac{2X}{1+X^2+Y^2},\ y=\frac{2Y}{1+X^2+Y^2},\ z=\frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2}$$

   なる変換によって 1 対 1 に対応します.

解説

ピタゴラスの定理は, 野外で直角を作図する実際の問題に使えます．古くはインドの聖典に寺院の着きり方の縄張りとして記述されています．また, 一般化し, $n\geq 3$ に対して $a^n+b^n=c^n$ の整数解の組 (a,b,c) の存在性に関する問題はフェルマーの大予想と呼ばれ 360 年にわたって代数学の発展に寄与して来ました．解決には, 代数学の成果が総動員されました.

一方, $p=2$ の場合は多数の解が存在します．それらの統一的記述法にはいくつかの方法があります. (a,b,c) がピタゴラス数であるためには, 互いに素な自然数 $m>n$ に対して

$$(a,b,c)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)\text{ または }(2mn,m^2-n^2,m^2+n^2)$$

であることが必要十分です. (m,n) は無数に存在し, $2mn$ は重複しないことから, ピタゴラス数は無数に存在します. これによりピタゴラス数を漏れ・重複なく見つけ出すことができます.

さて, $a^2+b^2=c^2$ の右辺 $c^2(c)$ は零でないので, 両辺を c で割ると

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

となり有理数 a/c, b/c は共に原点を中心とする単位円周上に存在することが分かります. 一方,

$$\frac{a}{c}=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \frac{b}{c}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

によって実数直線上の有理数 $t=m/n$ と円周上の有理点 $(a/c,b/c)$ が 1 対 1 に対応がつくことが分かります.

同様に, 平面上の点 (X,Y) は原点を中心とする球面上の点と

$$x=\frac{2X}{1+X^2+Y^2},\ y=\frac{2Y}{1+X^2+Y^2},\ z=\frac{-1+X^2+Y^2}{1+X^2+Y^2}$$

なる変換によって 1 対 1 に対応します. 従って, 平面上の有理点座標から, $a^2+b^2+c^2=d^2$ を満たす正数の対を構成することができます.

$\boldsymbol{p}=(3,4,5)^\top$ を 3 次元ベクトルと考え以下の 3 つの行列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix},$$

あるいは

$$\boldsymbol{A}\text{'}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&2&2\\-2&1&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}\text{'}=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&-2&2\\2&-1&3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}\text{'}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&2&2\\2&1&3\end{pmatrix},$$

を次々と作用させることによってピタゴラス数を生成できることが知られています.

さて次に, $a^2-ab+b^2=c^2$, $a^2+ab+c^2=c^2$ はそれぞれ, $2\pi 3$, $4\pi 3$ のエイゼンシュタイン (Eisenstein)3 角形と呼ばれます. エイゼンシュタイン 3 角形の整数長の辺の組は, 整数の組 (m,n) から

$$a=m^2-mn+n^2,\ \ b=2mn-n^2,\ \ c=m^2-n^2$$

$$a=m^2+mn+n^2,\ \ b=2mn+n^2\ \ c=m^2-n^2$$

によって一意に生成されます.

$a^2-ab+b^2=c^2$, $a^2+ab+c^2=c^2$ 両辺を右辺の c で割るとそれぞれ

$$x^2-xy+y^2=1,\ \ x^2+xy+y^2=1,\ x=\frac{a}{c},\ \ y=\frac{b}{c}$$

となり, 長軸の方向が, それぞれ直線 $y=x$ と直線 $y=-x$ とであり, 原点を中心とする楕円になります. 従って, ピタゴラスの定理の場合と同様直線上の有理数と楕円上の有理点の変換を見つけばよいことに

なります. $t=\frac{n}{m}$ と置けば,

$$\begin{aligned} x = \frac{1-t+t^2}{1-t^2},\ \ y = \frac{2t-t^2}{1-t^2}, \\ x = \frac{1+t+t^2}{1-t^2},\ \ y = \frac{2t+t^2}{1-t^2} \end{aligned}$$

によって有理数から楕円上の点を生成できます.

さて次に, m, n, p, q を $gcd(m,n,p,q)=1$ $m+n+p+q \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ を満たす自然数とすれば,

$$\begin{aligned} a &= (m^2+n^2)-(p^2+q^2) \\ b &= 2(mq+np) \\ c &= 2(nq-mp) \\ d &= (m^2+n^2)+(p^2+q^2) \end{aligned}$$

に対して,

$$a^2+b^2+c^2=d^2$$

が成立します. また, 行列

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{m^2+m^2+p^2+q^2}} \begin{pmatrix} m^2+n^2+p^2+q^2 & 2np-2mq & 2mp+2nq \\ 2mq+2np & m^2+n^2+p^2-q^2 & 2pq-2mn \\ 2nq-2mp & 2mn+2pq & m^2-n^2-p^2+q^2 \end{pmatrix}$$

は整数から構成される 3 次元の回転行列になっています.

ピタゴラスの定理を通じて, 代数幾何学と代数整数論の中の基本的な事項を学ぶことができます. 純粋数学では幾分脇道にそれる分野に見えますが, 平面上の回転角を有理数で近似することができます. さらに, 平面上の有理点座標から空間の回転角を有理数の対で近似できます. CG へ利用すれば有理数だけで回転を精度よく計算できることになります.

講評

完全な解答に至った参加者はいませんでした.

5　ロボットの部

昨年度より, K-Junior を使ってロボットの部を再開しました. 参加者, 補助の学生, 課題作成者が評価し, 命令が正確に実現されている課題が選ばれました.