第18回数理科学コンクール課題解説

平成27年11月3日 千葉大学先進科学センター

目 次

はじめに

明治の文明開化以来, 我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました. 戦後もこの傾向は基本的には変わっていません. 現在, 我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが, これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです. 欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると, これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して, 新しい科学技術のフロンティアを切り開き, 世界に貢献することであると考えられます.

千葉大学では, 日本のみならず, 世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し, 育成するための一助として, 本年度も, 第 18 回数理科学コンクールを開催しました. このコンクールの特色は次の通りです.

1. 自由にゆったり考える

    試験時間は 6 時間, 途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする.

2. たのしい物理・数学の発見

    物理や数学のカリキュラムにとらわれず, 物理や数学の本質に根ざした, 考えて楽しい問題を提供する.

3. 多彩な才能の評価

    様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため, 問題をたくさん解いたものだけでなく, 1 題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする. また, グループとしての総合能力を評価するため, 個人参加だけでなく, グループ参加も認める.

4. 人材の育成

    コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため, コンクールの表彰式と講評会を行う.

過去 17 回のコンクールに引き続き, 多くの中高生の参加者があり, 楽しい雰囲気の中で, いろいろユニークなアイディアが生まれました. 中学生も, 高校生に負けず優秀でありました. そして, 答案を見ると, それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました.

第 18 回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます. 解説に述べてあるように, 各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題, さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました. 課題提出者一同, みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして, 大変感心いたしました.

参加者の皆さんが今後, 科学する心を磨き続け, 我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します. 今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています. 千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です. 物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています. 課題作成者もさらに研鑽をかさね, おもしろく, しかも科学の本質に迫る課題を考ていきます.

課題作成者

千葉大学教授	井宮　淳
東京慈恵会医科大学教授	植田　毅
	(五十音順)

平成 27 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 27 年 7 月 18 日と 19 日に開催しました第 18 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました.

第 18 回数理科学コンクール優秀者

金欅賞	岩瀬裕哉 菅 碩伸
	片岡知徳 常泉壮史
	山本菜摘 高木淳也 吉村勇輝
	関 淵之 鶴田大地 坂本 運
	佐藤佑磨 石毛遥也 李 俊虎
銀欅賞	積田嘉海
	橋本直希 吉田拓人 竹本 凱
	高田麻衣 竹内 舞 西田えり佳
	松永美優 飯尾萌々子 中川 真代
	大鐘 潤
	澤田 亮
	青島彬浩 佐賀晴樹
	望月咲百合 安田千七
学長賞	菅 碩伸
特別賞	郡山巧人 古野明日香
機巧賞	中村梨久 高橋真洋
機巧賞	明石諒太郎 島田祥太朗 松澤大樹

課題	参加者名
1	郡山巧人 古野明日香
	積田嘉海
2	郡山巧人 古野明日香
	岩瀬裕哉 菅 碩伸
	片岡知徳 常泉壮史
	橋本直希 吉田拓人 竹本 凱
	松永美優 飯尾萌々子 中川真代
	佐藤佑磨 石毛遥也 李 俊虎
	高田麻衣 竹内 舞 西田えり佳
3	郡山巧人 古野明日香
	岩瀬裕哉 菅 碩伸
	山本菜摘 高木淳也 吉村勇輝
	関 淵之 鶴田大地 坂本 運
	佐藤佑磨 石毛遥也 李 俊虎
	大鐘 潤
	澤田 亮
	青島彬浩 佐賀晴樹
	望月咲百合 安田千七
4	郡山巧人 古野明日香
	岩瀬裕哉 菅 碩伸
	片岡知徳 常泉壮史
	山本菜摘 高木淳也 吉村勇輝
	関 淵之 鶴田大地 坂本 運

千葉大学先進科学センター長
教授 加納博文

1　課題 1

課題

昔, 全長がおよそ 40cm に達するトンボが生息していたことを示す化石が発見されています．しかし, 現在の地球上で, 自然の状態で胴体の直径が 30cm を超えるカブトムシは存在しないし, 直径 30cm を超えるニシキヘビのようなミミズは見たことがありません．この理由は巨大なトンボが生息していたころは地球大気の酸素濃度が現在より高かったからと言われています．確かに, 水槽に酸素を過剰に供給すると縁日ですくった金魚が鯉のようにおよそ 30cm にも成長することが知られています．では, 酸素濃度がどのように昆虫やミミズなどの生物の大きさを制限しているのか, 物理学的, 生物学的考察し, 説明してください．

解説

この課題は生物の仕組みに思いを馳せないと正解にはたどり着けません．ただ, 生物のことだけ知っていればいいかと言うとそうでもなく, 最終的には物理現象に行きつきます．生物学, 医学は総合科学で生物学, 物理学, 化学, 数学, 情報学, 材料科学など様々な知識がないと太刀打ちできません．そう言う意味でどこを端緒に取り組めばいいのか分からず, 難しかったかもしれません．この課題では酸素が関係していますから, 呼吸に関係していると考えるのが自然でしょう．

この世に存在するほとんど生物は動物だけでなく, 植物も含めミトコンドリアを用いて呼吸をしています[1)]．呼吸とは大雑把に言うと, プロトンポンプ（細胞などを作る膜の内外に水素イオンを移動させる分子的な装置）を使ってエネルギーを生成することである．まず, 酸化還元反応で発生したエネルギー（携帯用カイロが温かくなるのと同じ）によって, 膜を通してプロトンが汲み出される．すると膜をはさんで, およそ 150mV(ミリボルト) の電位差に相当するプロトンの濃度差が生じます．この駆動力が ATP アーゼ（ATP を合成する酵素）のモーターを動かし, 生命の普遍的なエネルギー物質である ATP を合成します．出だしの化学反応の酸化剤が酸素です．

体を作る細胞が全て同じだけエネルギーを消費するとすれば, 体が大きくなればそれに比例して酸素が必要になります．したがって, 酸素をどのように取り込むかにより体の大きさが制限されます．

細菌など単細胞の生物から, 多細胞生物, 昆虫などの節足動物, 魚類, 両生類, 爬虫類, 哺乳類, それぞれどのように呼吸しているでしょうか？酸素を取り込む最も簡単な方法は, 皮膚（細胞膜）を通した拡散です．動きの無い水にインクを垂らした時のインクの広がりや空気中への芳香剤の広がりなどが拡散です．しかしながら, これでは大きな動物の酸素の需要を満たすことができません．動物における呼吸器の進化は, 長い距離の酸素の輸送に拡散では不十分であることの直接的証拠です．

哺乳類の一種であるヒトは消費する酸素の 2%しか皮膚を介して拡散で得られないことが分かっています．それ以外の酸素は肺から得ています．気管はどんどん枝分かれして, 最終的に葡萄の実のようにつながった小さな袋状の肺胞になります．肺胞では拡散に基づいて血液と空気の間でガス交換が行われます．成人の肺では直径 0.1～0.3mm 程度の肺胞が, 約 3 億個含まれています．肺胞の全面積は約 $100\mathrm{m}^2$

で, 皮膚の面積の 50 倍に相当します. 肺胞では空気と血液を隔てる膜の厚さは $0.4\mu\mathrm{m}$ と極めて薄くなっていて, 酸素と二酸化炭素のガス交換は迅速に行われるようになっています.

皮膚を通しての拡散は, 大きな動物では必要な酸素量のわずかしか供給できませんが, 小さな動物の酸素需要は皮膚からの拡散で充分である場合もあります. 充分かどうかは以下のような大雑把な考察でおおよそ判断できます 2).

動物のエネルギー消費, つまり酸素の需要量は動物の質量に比例します. 質量はほぼ体積に比例すると考えられます. 一方, 皮膚から拡散で取り込める酸素量は皮膚の面積に比例する. 動物のサイズを表す典型的な長さを R とすると, 体積は R^3 に比例し, R^2 に比例する. したがって, 単位体積当たりに消費可能なエネルギー, つまり, 細胞一つが消費可能なエネルギーは

$$\frac{\text{表面積}}{\text{体積}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

に比例します. つまり, 動物の大きさ R が大きくなると, 細胞 1 個あたりに使えるエネルギーが小さくなります. 細胞には生命を維持するために必要最低限の酸素量があるので, これが皮膚からの拡散のみで酸素を取り込む動物の大きさを制限します. 実際, 皮膚からの拡散のみで酸素を得る動物のサイズをおおまかに見積もることができ, 最大 0.5cm となります. したがって, 昆虫のような小さな動物だけが, 酸素の供給を拡散のみに依存できることが分かります.

ミミズは呼吸器はなく, 皮膚の毛細血管から酸素を取り込み二酸化炭素を排出する皮膚呼吸のみを行っています. そのため, ミミズの太さは直径 2.6cm が限度と言われています 3).

昆虫などの陸上性の節足動物には, 気管により呼吸しているものがいます. 気管の体表の開口部は気門と呼ばれ, 体内で我々の毛細血管や木の根のように細かく枝分かれし, 直径 1 μ m 以下の細かい管（気管小枝）になり, 全身に広がっています. 空気中の酸素は拡散によって気門から気管を通り, 気管小枝に到達します. 二酸化炭素も, 気管から気門を経て, 拡散によって空気中に排出されます. 血液など粘性のある液体は狭い管などを流れるときには粘性の影響は管の半径の 4 乗分の 1 に比例して大きくなります. したがって, 昆虫のような小型の動物では粘性の影響の大きな血液を用いて組織に酸素や二酸化炭素を運ぶより, 粘性の低い空気を直接組織に届ける方がはるかに効率がよくなります. しかし, 気管系はガスの運搬を拡散に依存するため, これが昆虫などがある程度の大きさ以上に大型化できません. ただ, 体表からの距離が一定内に収まっていればいいので, ミミズのように円柱状に長くなることは可能で, ムカデやトンボが細長い体であるのはその影響と考えられます.

この制限の中で, 体外の酸素濃度を高くすると, 皮膚からの酸素の拡散量が増え, 動物がより大きくなれると考えられます.

参考文献

1) ニック・レーン: ミトコンドリアが進化を決めた, みすず書房

2) ジョン・ホイットフィールド, 野中香方子訳：生き物たちは 3/4 が好き, 化学同人

3) 本川達雄：ゾウの時間ネズミの時間：サイズの生物学, 中央公論社〈中公新書〉

講評

なかなかとらえどころがなく苦戦した様子でした．実際，この課題に解答していた答案は非常に少なかった．

まず，体の大きさを制限する要因として呼吸に注目して，酸素の需要が体積に比例すること，酸素を取り込む量が体の表面積に比例することに気付いている答案を高く評価しました．

重力による影響をスケーリング則を用いて議論している答案もありました．重力も地球上の生物の形を決める重要な要因の一つになっているので，論理展開が間違っていなければ高く評価しました．

2　課題2

課題

紙玉鉄砲という竹の筒から紙で作った玉を打ち出す玩具があります．紙玉鉄砲は, 竹から細長い円筒を切り出したものをシリンダーとし, その両端に水で濡らし丸めた紙（吸水性の良い新聞紙など）を詰める．シリンダーの内径よりやや細い竹の棒で手元側に詰めた紙玉を押し, ピストンとする．ピストンをある程度押し込んだところで, 内部の空気圧のために先端に詰めた紙玉が弾き出され, 飛んで行く．

紙玉鉄砲でできるだけ先端に詰めた玉を速く撃ち出し, 遠くまで飛ばすための理想的な設計と飛ばし方を考えてください．特に, 竹筒の半径, 長さ, 玉の詰め方, ピストンの押し方に注目して考察してください．

解説

紙 (玉) 鉄砲で遊んだことがある人は皆無だったようです．この課題を解く一つの方法は実験に依る方法です．要するに, いろいろな場合についてやってみる．竹筒の半径, 長さ, 玉の詰め方, ピストンの押し方の4つを変えて, どのようなものが最適化を調べるためには, 例えば, それぞれをただ3種類ずつ試してみるとしても, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ 通りもの場合について調べなければならない．4項目内3つを固定して1つを変化しさせて, 玉の飛距離が単調に増加（もしくは減少）したとしても, 他の値が変わった場合, 傾向が変わる可能性があるので注意が必要です．中学生の皆さんはこの方法で取り組むしかなかったものと思います．

しかし, これでは効率が悪いので物理学が登場します．この課題を物理学で取り扱えるように, 紙玉鉄砲の動作原理, 性能の向上について以下のように単純化した模型で考えます．

複雑な物理現象を, 不必要と考える部分は無視し, 影響が小さいと思われる部分は近似し, 本質的な部分を取り出して, 物理学で（数学的に）扱えるようにすることをモデル（模型）化と言いますが, 何を本質と思うかが物理屋さんの腕の見せ所です．研究者はこのセンスを磨かなければなりません．

さて, この課題では, 竹から細長い円筒を切り出したものをシリンダーとし, シリンダーの内径よりやや細い竹の棒で手元側に詰めた紙玉（紙玉 A）を押すので, これをピストンとする．ピストンをある程度押し込んだところで, 内部の空気圧のために先端に詰めた紙玉（紙玉 B）が弾き出され, 飛んで行くものとします．

竹筒および紙玉の半径を a, 2つ紙玉を詰めたときの紙玉の中心間の距離を L_0, 紙玉の質量を m, 紙玉と竹筒の間の静止摩擦係数を μ (ギリシャ文字, ミューと読む), 動摩擦係数を μ' とします．空気は理想気体とみなせるものとし, 初めの状態では封入された空気の圧力および温度は大気圧のものに等しく, それぞれ P_0, T_0 であったとします．紙玉と竹筒の間から空気の漏れはないものとして考えます．紙玉 B をより遠くに飛ばすためには, 飛び出し速度が大きくなるようにすればよいので, 紙玉 B が飛び出す時の速度を求めます．

初めの状態で2つの紙玉にはさまれたシリンダ内の空気の体積は

$$V_0 = \pi a^2 L_0 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi a^3 = \pi a^2 \left(L_0 - \frac{4}{3}a \right)$$

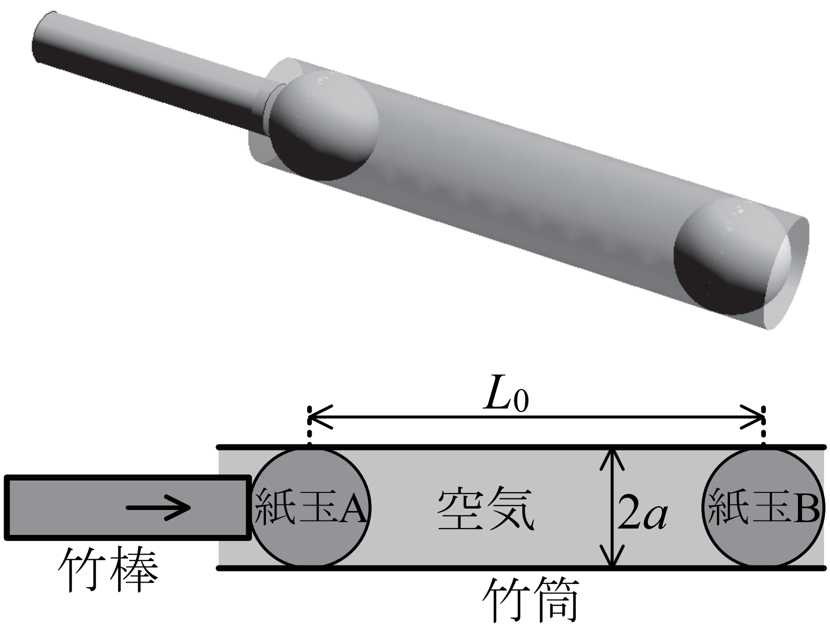


図 1: 紙玉鉄砲の模式図と数理モデル

となります.

　竹棒を押し, 紙玉 A を押し込むとき, 空気の圧力 P と体積 V が

$$PV^{\gamma} = \text{一定}$$

の関係を満たすとします. ここで, γ(ギリシャ文字, ガンマと読む) は押し方によってことなる定数です. 例えば, シリンダ内の圧力を一定に保ちながらピストンを押すとき（要するに, 温度を下げながらピストンを押す）には $\gamma = 0$, シリンダ内の温度を一定に保ってピストンを押すときには, $\gamma = 1$ となります. ピストンを急に押す時には γ は定圧比熱を定積比熱で割ったものになります.

　2 つの紙玉の中心間の距離が L になったとき, シリンダ内の空気の圧力を P と体積を V とすると, $PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$ より, $P = P_0 \left(V_0/V\right)^{\gamma}$ で, $V = \pi a^2 \left(L - \frac{4}{3}a\right)$ であるから, 圧力は

$$P = P_0 \left(\frac{\pi a^2 \left(L_0 - \frac{4}{3}a\right)}{\pi a^2 \left(L - \frac{4}{3}a\right)} \right)^{\gamma} = P_0 \left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L - \frac{4}{3}a} \right)^{\gamma}$$

となります. また, 空気は理想気体と見なせるとしているので, シリンダ内の空気分子を $n$mol, 気体定数を R とすると状態方程式 $P_0 V_0 = nRT_0$, $PV = nRT$ を満たすから

$$\frac{T}{T_0} = \frac{PV}{P_0 V_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} \frac{V}{V_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L - \frac{4}{3}a} \right)^{\gamma - 1},$$

すなわち,

$$T = T_0 \left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L - \frac{4}{3}a} \right)^{\gamma - 1}$$

となります.

２つの紙玉の中心間の距離が L' になったとき, 先端の紙玉 B が動き始めたとすると, このとき, 紙玉 B が気体から押される力（シリンダ内の気体から押される力と外気（大気）から押される力の差）と竹筒から受ける静止摩擦力が同じであるから, 紙玉 B が竹筒から受けている垂直抗力の大きさを N, このときの圧力を P' とすると,

$$\begin{aligned}\mu N &= \left(P' - P_0\right)\pi a^2 \\ &= P_0 \pi a^2 \left[\left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a}\right)^{\gamma} - 1\right] \\ N &= \frac{\pi a^2}{\mu} P_0 \left[\left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a}\right)^{\gamma} - 1\right]\end{aligned}$$

となります.

紙玉 B が竹筒から受ける抗力は常に一定と考えられるので, 紙玉 B が動き始めてから竹筒から受ける摩擦力（動摩擦力）は

$$\mu' N = \frac{\mu'}{\mu} \pi a^2 P_0 \left[\left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a}\right)^{\gamma} - 1\right]$$

となります.

紙玉 B が飛び出すまでの移動距離, （すなわち, 紙玉の半径 a）は L_0 に比べて充分小さく, この間の空気の圧力の変化を無視できるとすると, このときの紙玉 B の運動方程式は加速度を $\ddot{x}$ として

$$m\ddot{x} = (P' - P_0)\pi a^2 - \mu' N = \left(\mu - \mu'\right) N$$

と書けます. したがって, 紙玉 B の加速度は

$$\ddot{x} = \frac{\mu - \mu'}{m} N = \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) \frac{\pi a^2}{m} P_0 \left[\left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a}\right)^{\gamma} - 1\right]$$

となります.

この加速度は一定で, 紙玉 B の初めの速度は 0 であるから, 筒から飛び出すまでの時間を t とすると, $a = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$ より, $t = \sqrt{\frac{2a}{\ddot{x}}}$ であるから, 飛び出す時の速さ v は

$$\begin{aligned}v &= \ddot{x}t = \ddot{x}\sqrt{\frac{2a}{\ddot{x}}} = \sqrt{2a\ddot{x}} = \sqrt{\frac{2a(\mu - \mu')}{m} N} \\ &= \sqrt{2\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) \frac{\pi a^3}{m} P_0 \left[\left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a}\right)^{\gamma} - 1\right]}\end{aligned}$$

と導かれます.

ここで, 最後の式と最後から 2 番目の式を使うときには注意が必要です. 最後の式は L' を含んでいて, L' が与えられるものとした式です. しかし, ピストンをどこまで押したら紙玉 B が動き始めるかは我々は決めることはできません. 筒が決まってしあったら, 我々にできるのは玉の詰め方とピストンの押し方を工夫することだけです. L' は, 詰め方で決まった N とピストンの押し方で決まる γ により自ずと決ま

るものです．したがって, 我々は, L' を含んでいる最後の式ではなく, 最後から 2 番目の式を用いなければなりません.

最後から 2 行目の式に注目すると根号（ルート）の中が紙玉 B が竹筒から受ける抗力 N に比例しているので, 玉をきつく詰めた方がよいことが分かります．また, $\mu - \mu'$ にも比例するので, 静止摩擦係数と動摩擦係数の差が大きい方がよいことが分かります．コンクール当日, 会場にいろいろな粗さのサンドペーパーが置いてあったのは, 筒の中を磨いて, 摩擦係数を変えてもらうためでした.

次に, 筒の半径を考えると, これも根号の中が a に比例しているので, 直径が大きな方が有利に見えますが, これは紙玉 B の質量が大きさに寄らない場合です．しかし, 紙玉の密度が一定と考える方が現実に近そうです．密度を ρ (ギリシャ文字, ローと読む) とすると, 紙玉の質量は $m = \rho\frac{4}{3}\pi a^3$ なので, 紙玉の射出速度は

$$v = \sqrt{\frac{3(\mu - \mu')}{2\pi\rho a^2}N}$$

となり, 筒の半径が小さい方が大きくなることが分かります.

ピストンの押し方について考えてみると, L' を用いた表現では

$$\left[\left(\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a}\right)^\gamma - 1\right]$$

と言う項があり, $L_0 > L'$ であるから, $\frac{L_0 - \frac{4}{3}a}{L' - \frac{4}{3}a} > 1$ となります．したがって, γ ができるだけ大きな方が射出速度は大きくなるということになります．上で見たように, γ はピストンを急に動かす断熱変化が大きいので, 実際にやってみた感覚と合っています．しかし, 今考えているモデルで正しい答えは L' を用いない, N を用いた式なので, γ は含まれず, 押し方には関係ないという結論になります．これは実際の感覚に合わない気がしますが, 今の計算モデルでは空気も加速度運動すること, 空気が圧縮されると理想気体でなくなること, ゆっくり押すと空気が漏れてしまう可能性があることなど考慮に入れていないことが要因かもしれません．そのためにはもっと現実的なモデルを作らなければなりません.

講評

多くの参加者が実際に飛ばしてみて, 解答を書いていました．実験を行った答案で非常に緻密に計画されたいい実験を行ったものがありました．そして, ほぼ上で述べたような結論に達していました．この答案を高く評価しました．また, 思考実験的な考察による答案を書いたもの見られましたが, 最終的に行き着いた答えが違っているものが多く見られました．その場合でも, 論理の組み立て, 論拠が正しいものは高く評価しました.

3　課題 3

課題

アイザック・アジモフの創ったロボット工学 3 原則は

第 1 条 ロボットは人間に危害を加えてはならない．また, その危険を看過することによって, 人間に危害を及ぼしてはならない.

第 2 条 ロボットは人間にあたえられた命令に服従しなければならない．ただし, あたえられた命令が, 第一条に反する場合は, この限りでない.

第 3 条 ロボットは, 前掲第一条および第二条に反するおそれのないかぎり, 自己をまもらなければならない.

西暦 2058 年の「ロボット工学ハンドブック」第 56 版

です．和文は早川書房『われはロボット』からの引用です．この 3 原則の元の英文は

1 A robot may not injure a human being or, through inaction, allow a human being to come to harm.

2 A robot must obey the orders given it by human beings, except where such orders would conflict with the First Law.

3 A robot must protect its own existence as long as such protection does not conflict with the First or Second Law.

この 3 原則は小説の世界を抜け出して, 実社会でのロボット工学のあり方や, ロボット工学研究者の倫理観に関係付けられることもあります．また, この 3 原則に基づいて, 作者アイザック・アジモフ自身も, その後多数の小説を発表しています．ここでは, 3 原則に基づいて以下の事象について考えて見ましょう.

問 1 この 3 原則に基づけば, ロボットは本当に人間に危害を及ぼすことがないのでしょうか.

問 2 もし, 危害を及ぼすことがあるとすれば, どのような事象が起こっているのでしょうか.

問 3 ロボットが, 人間に対して絶対に危害を及ぼさないようにするためには, 原則全体をどう変更すれば, そのことが実現可能になるででしょうか.

解説

ロボットシリーズの作者アシモフの用意した解答は第零原則

> ロボットは人類に危害を加えてはならない．また, その危険を看過することによって, 人類に危害を及ぼしてはならない.
>
> A robot may not harm humanity, or, by inaction, allow humanity to come to harm.

そして, 原則は

第零条 ロボットは人類に危害を加えてはならない. また, その危険を看過することによって, 人類に危害を及ぼしてはならない.

第 1 条 ロボットは人間に危害を加えてはならない. また, その危険を看過することによって, 人間に危害を及ぼしてはならない. 第零法則に反する場合はこの限りではない.

第 2 条 ロボットは人間にあたえられた命令に服従しなければならない. ただし, あたえられた命令が, 第一条に反する場合は, この限りでない.

第 3 条 ロボットは, 前掲第一条および第二条に反するおそれのないかぎり, 自己をまもらなければならない.

と変更されます.

この課題には, 大きく 2 つの出題意図があります. 1 つ目は英語の冠詞の理解に関する問題です. a human の不定冠詞 a を学校英語では中学校で初めて英語を習うとき「1 つの」はるいは「1 人の」と訳す (英文解釈) ことを習います. ロボット工学の 3 原則の場合, 不定冠詞 a は「一人ひとりは」の意味で使われます. 1 階述語論理の論理式で記述すると

$$\forall x M(x) : \{M(x) \text{ は「} x \text{ が人間である. 」ことを示す述語. } \}$$

となります. すなわち, 不定冠詞 a の付いた「a human」は「すべての一人一人の人間は」と解釈することになります.

不定冠詞 a を正しく解釈しても, 3 原則だけからでは, 人類全体に対して, この原則が適用できるかどうかをロボットは判断できません. そこで, 大前提として人類全体へのロボットの行動規範を定める第零原則が規定されます.

3 原則を述語論理記号で表すと

$$\begin{array}{ll} L1 & \forall y R(y) \to \forall x \forall y \neg I(x,y) \vee \forall y R(y) \wedge (\neg H(y) \to \forall y \forall x \neg S(y,x)) \\ L2 & L1 \wedge \forall y R(y) \to \forall x O(y,x) \\ L3 & L1 \wedge L2 \wedge \forall y R(y) \to P(y) \end{array}$$

となります. ここで,

$R(y)$	y はロボットである.
$I(y,x)$	y は x に危害を加える.
$H(y)$	y は危険を加護する.
$S(y,x)$	y は x に危機が及ぶことを見過ごす.
$O(y,x)$	y は x に従う.

です．以上の 3 つの論理式がロボットの行動を縛る原則となります．

第零原則含めた論理体系は

$$
\begin{array}{ll}
L0 & \forall y R(y) \to \forall x \forall y \neg WI(y) \vee \forall y R(y) \wedge (\neg H(y) \to \forall y \forall x \neg WS(y)) \\
L1 & L0 \wedge \forall y R(y) \to \forall x \forall y \neg I(x,y) \vee \forall y R(y) \wedge (\neg H(y) \to \forall y \forall x \neg S(y,x)) \\
L2 & L1 \wedge \forall y R(y) \to \forall x O(y,x) \\
L3 & L1 \wedge L2 \wedge \forall y R(y) \to P(y)
\end{array}
$$

となります．ここで，

$WI(y)$　y は人類に危害を加える．
$WS(y)$　y は人類への危害を加護する

です．

ロボットは思考をするとき，事象をまず論理式で表します．そして，その事象が正しい事象かどうかを定理証明の手法で証明すると考えることができます．上の表記は 1 階述語論理 (述語が固定されている.) と呼ばれます．ロボットの周りで日常に起こる事象は 1 階述語論理だけでは，一般には記述能力が不十分です．述語のクラスも全称記号や存在記号で記述される 2 階述語論理が必要なことが予想されます．

講評

ほとんどの解答は，3 原則の中だけで表現を変えることに取り組んでいました．その中で，大前提に近い解釈を加えた解答を評価しました．

4　課題 4

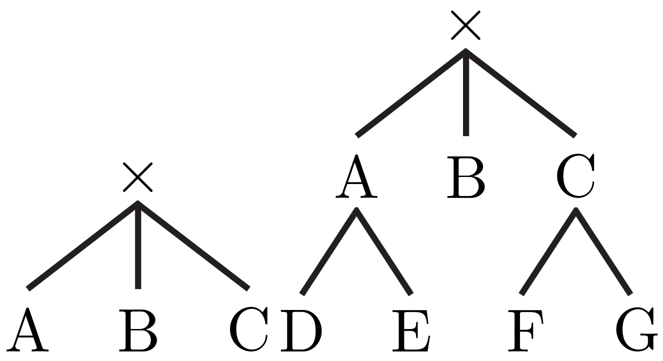
課題

集合の包含関係を考えることにします．$A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$, $A \cup B = \emptyset$, $B \cup C = \emptyset$, $C \cup A = \emptyset$, であるときこの関係を図 1(a) の様な木構造で表すことができます．ここで, A, B, C を葉　X を A, B, C の根といいます．葉と根を結ぶ線を枝といいます．

さらに, $D \subset A$, $E \subset A$, $F \subset C$, $G \subset C$, $\mathrm{F} \cup G = \emptyset$, $G \cup F = \emptyset$, であるとき木は図 1(b) の様になります．図 1(a) の木を階層 2 の木, 図 1(b) の木を階層 3 の木といいます．集合の包含関係を順序関係と考えれば, これらの木は順序関係による階層構造を表現しています．一方, A, B, C や　F, G などは左から右に向かって並んでいることから, 「左から右に向かって何らかの順序関係がある．」と無意識に感じてします．しかし, これらには順序を定義したわけではなく, 文章の中で出現順にアルファベットのラベルを付けたに過ぎません．

そこで, 各階層, 今の例では, A, B, C や F, G の層に無意識の順序を入れない木構造の表現法を考えなさい．

ヒント:各階層の葉の数, 階層数が, 共にある程度大きな例で考えると表現法が明確になります．



(a)　　　　　(b)

図 2: 木構造

訂正

正	$A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $C \cap A = \emptyset$
誤	$A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$, $A \cup B = \emptyset$, $B \cup C = \emptyset$, $C \cup A = \emptyset$
正	$D \subset A$, $E \subset A$, $F \subset C$, $G \subset C$, $F \cap G = \emptyset$, $G \cap F = \emptyset$
誤	$D \subset A$, $E \subset A$, $F \subset C$, $G \subset C$, $F \cup G = \emptyset$, $G \cup F = \emptyset$

解説

階層構造を表現する最も基本的な技法は木構造である．木構造は計算機科学 (Computer Science) の一分野であるデータ構造学の中で取り扱われる最も基本的なデータ構造の一つです．従来は, データ構造の観点から木構造を符号でどのように表現するのか, それと関係し, 木構造のどこかに割り振られたデータを高速に検索する算法の設計などが問題となってきました．例えば, 根を $\emptyset$ 左の枝に 0, 右の枝に 1 を割り振ると木の根, 枝に割り振られた符号は

$$\emptyset, 0, 1$$

と 2 進数で表すことができます．課題の (b) の木の A,B,C,C,D,F の符号は

$$\begin{array}{cr} A & 00 \\ B & 01 \\ C & 02 \\ D & 010 \\ E & 011 \\ F & 020 \\ G & 021 \end{array}$$

となります．この符号化法では, 木の根を第零階層とすれば, n 階層目の頂点の符号の長さは n 桁となります．そして, この頂点の親になる $(n-1)$ 層目の頂点が $(n-1)$ 層目の左から何番目かは $(n-1)$ 桁目の数字を見ればわかります．当然, n 桁目の数位はその頂点が左から何番目の枝に繋がる頂点かを表しています．このような符号で木の構造を一意に表すことができます．

木構造は以下に定義するグラ (Graph) の特別な場合になります．

> 頂点の集合を V, V の要素を結ぶ辺の集合を E とする．V と E との組 $G(V, E)$ をグラフという．
>
> 頂点から枝をたどる道を経路という．ある頂点から始めての経路が元の頂点に戻る経路を閉路という．閉路の無いグラフを木という．

グラフは自然科学や工学に留まらず, 社会科学でも利用されます．ある現象 A から現象 B が導き出される場合に, この因果関係を $A \to B$ と表現し, 方向のある枝を持った有向グラフによって種々の現象の因果関係を記述することができます．インターネット上のホームページや情報の接続関係は有向グラフで表現されます．Google に代表される検索エンジンはインターネット上の情報の接続関係の重要度から, 順序構造 (ランキング) を計算することを行っています．

本課題で問題としていることは木構造の視覚的表現です．平面の上にグラフを目的に合わせて表示する分野をグラフ描画 (Graph Drawing) と言います．グラフで表現できるものは, 鉄道やバスの路線図, 地図の上の道路, 回路の配線図などがあります．

鉄道やバスの路線図では, 駅や停留所がグラフの頂点になります．また, 地図上の道路では, 交差点や分岐点をグラフの頂点として表現します．

旅行ガイドは, 路線ガイドでは, 路線図は停留所の位置関係と経路の接続とを保ったまま, 長方形や正方形の領域に埋め込んで表示されます. また, 近隣の案合図では, 交差点の位置関係と道路の接続関係を保ったまの簡易図が作られます. さらに, 回路図では, 装置の大きさの制約から, 配線構造を保ったまま, 回路素子と効率的に配置することが求められます. グラフ描画では, 計算機を使ってこのような図面を効率よく描画することが行われます.

情報可視化 (Information Visualisation) にはグラフ描画の後に, 色や頂点に付加される情報の表現に関する工業意匠の知識と技能が要求されます. 簡単な情報可視化は, 工業意匠的立場だけで表現ができます. しかし, 大量のデータを効果的に可視化するためには計算機科学の知識と対象分野に関する深く広い知識が必要となります.

木構造の可視化に限ると, 生物の進化は生命の木によって表現されます. 歴史的に生命の木は系統分類学と呼ばれ, 生物の見かけ, 部分の機能などの類似性から系統化されてきました. 現在では, 遺伝子の類似に基づく分子系統によって生命の系統が記述されます. 分子系統木による分類や系統化は生物に留まらず, ビールスやタンパク質に対しても行われます. この手法は現在, 医学や薬学の中で欠くべからざる分野になっています. ここで, 階層の中での順序関係のない木の表現が必要となります.

物理的な現象を計算機で計算し, 画面に表示する技術を可視化 (Scientific Visualisation) と言います. 航空機の羽や, ジェットエンジンのタービンブレードの設計は可視化技術なしには行うことができません. 一歩進めて, 数値化された情報を理解しやすい形式で画面に表現する技法が情報可視化です.

講評

木構造のデータ構造の本質を捉えて, 平面にどのように視覚化するかを中心に評価しました. 評価の高かった回答は, 分子系統学で利用される 1 つの方法なっていました. グラフ描画を情報可視化として利用する場合, 抽象関係を幾何学的に解釈し, 表現する技法が必要となります.

5　ロボットの部

一昨年度年より, K-Junior を使ってロボットの部を再開しました. 参加者, 補助の学生, 課題作成者が評価し, 命令が正確に実現されている課題が選ばれました.