第19回数理科学コンクール課題

1. 課題の部は 4 つの課題を用意しました．いくつの課題に解答してもかまいません．また, 1 つの課題にいくつ解答してもかまいません．例えば, 実験をして見つけた解答と, 実験をせずに考えた解答との 2 つの解答を提出してもかまいません．むしろ 2 種類以上の解答を歓迎します．その場合にはどうして答えが 2 つ以上になったかも説明してください.

2. グループで参加した諸君は, 1 つの課題に 1 つの解答でも, また, 複数の解答でもかまいません. たとえば, 協力して解答を考えたけれども, 途中から別々の結論を思いついた場合には, それぞれの参加者が別々に解答してもかまいません．その場合, 1 つの解答を一緒に提出する参加者の名前を, 解答用紙に記入してください．たとえば, A さん, B さん, C さん 3 人のグループで, A さんと B さんが 1 つの解答を, C さんが 1 人で, 別の解答を用意した場合には, A さん, B さんが用意した解答用紙には, グループ番号, A さん B さん 2 人の名前と参加番号を, もう 1 つの C さんの解答用紙にはグループ番号, C さんだけの名前と参加者番号を記入してください.

3. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません．ただし, 異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください．また, 1 つの課題に 1 つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください．1 つの課題に 2 つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください.

4. 課題に関する質問は監督者に質問してください．どんな質問でもどしどし質問してください.

5. 5 階の H-52 講義室と 5 階のフロアーには解答を考えるための実験用の道具, 教材, 機器が用意してあります．何を使っても構いません．工具の利用法は監督者に相談してください.

6. ロボットの部は, 第 1 日目にロボットの動作に関するプログラムの講習を受けてください．第 2 日目 (課題の部実施日) にプログラムを作成し, 第 2 日目の午後 3 時以降に動作評価のためのコンテストを実施します.

平成 28 年 7 月 17 日 千葉大学先進科学センター

課題の部

課題 1

誰しも子供のころにゴム風船で遊んだことがある．うっかり膨らませ過ぎたり, 尖ったものにぶつけて割れてしまった経験を持つだろう．そのゴム風船の割れ方は, 細かな破片になってしまったり, 大きく切り裂かれてしまったり様々である．その割れ方は, ゴムの厚みのムラにもよるかもしれないし, 無秩序に見える．果たしてそうなのだろうか? そこには隠れた法則性があるのかもしれません．風船の割れ方の法則性を見つけてください（ただし, ないのかもしれない）．

風船は風船の先端をカッターで突くことによって, 割ることとします．風船の膨らませ方を変えることによって, 割れ方がどのように変化するのか？風船の種類によって割れ方が違うのか? 色々な条件で考えてみてください.

課題 2

問 1 生物学の分野には

アレンの法則

> 恒温動物において, 同じ種の個体, あるいは近縁のものでは, 寒冷な地域に生息するものほど, 耳, 吻, 首, 足, 尾などの突出部が短くなる.

ベルクマンの法則

> 恒温動物においては, 同じ種でも寒冷な地域に生息するものほど体重が大きく, 近縁な種間では大型の種ほど寒冷な地域に生息する

という法則がある. これらの法則が成り立つ理由を物理的に考察してください.

問 2 決まった水の量で発熱している人の体を効果的に冷やすためにはどのように冷やすのがいいか考察してください. (看護学では頭を冷やすのではなく, 血流が体表に近い, 脇の下などを冷やすように教わりますが, 冷やす部位についてではなく, 水をどのように用いるかを考察してください.) ただし, 水と氷嚢以外は用いず, 熱は水以外に伝わることはないとします.

課題 3

数学を使って, マルクスがその著書「資本論」で展開した搾取の理論を証明しよう. そのために, まず, 1 品種の資産品 (例えば, 石油) を生産する経済モデルから始める.

石油 1 バレルを生産するための労働時間を τ とする. 石油 1 バレルを産出するためには, やはり石油を a バレル投入する必要があると考える. ここで, $0 < a < 1$ である. このとき, 石油 1 バレルを生産するために必要な全労働時間 t は

$$t = at + \tau$$

の解 $t = \frac{\tau}{1-a}$ である.

次に, 労働と対価の関係を調べる. 石油 1 バレルの販売価格を p, 労働者に支払われる 1 時間当たりの賃金 (労働の対価) を w とすると, 儲けが出るためには

$$p > ap + w\tau$$

が成立する必要がある. 2 つの式より

$$p > tw$$

を得る. 不等号の右辺は石油 1 バレルを生産されるために支払われる対価である. したがって,

$$p - tw$$

が資本家の利潤になり, 「労働者は自分の労働に見合うだけの対価を受け取ることは決してない.」と結論できる.

マルクスはその著書「資本論」の中で, 産業革命後の経済を考察し, この関係を導いた. ただし, ここで, 述べたような数式では書かれていない. 一方, 多数の生産品が存在する経済下での搾取の定式化は, 近代経済学として 1950 年代から 1960 年代にかけて, 日本の経済学者, 置塩信雄, 森嶋道夫 (英国で活躍) によって定式化された.

以下では, 行列とベクトルを利用して, 2 生産品モデルで搾取の関係式を証明することを考える. 2 生産品として, 仮に, 石油と電力を考えることにする.

数学的準備として, 行列とベクトルの演算の説明から始める. 以下では, 記号は実数を表すことにする.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ を横ベクトル, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を縦ベクトルと呼ぶ. 横ベクトルと縦ベクトルの間に演算

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + x_2y_2$$

を定義する. この演算を内積と呼ぶ. 内積の値は実数であることがわかる. また, 要素 x_1 x_2 y_1 y_2 がすべて正であれば内積の値も正である.

次に数の表

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

を行列という．2 つの行列の間の和と積は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

とする．一般には $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ である．

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を単位行列という．単位行列に対して, $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA}$ が成立する．さらに,

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$$

の解 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{A}$ の逆行列と呼び $\boldsymbol{A}^{-1}$ で表す．$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ であるとき, 逆行列が存在し

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

である．

　行列をベクトルに作用させる演算

$$\boldsymbol{Ay} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{ss}y_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{xA} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (x_1a_{11}x_1 + x_2a_{21},\ x_1a_{12} + x_2a_{22})$$

を定義する．縦ベクトルに行列を作用させるとその結果は縦べはクトルになり, 横ベクトルに行列を作用させるとその結果は横ベクトルになる．これらを線形変換という．行列とベクトルの順に注意すること．

　さらに, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ について $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ であるとき $\boldsymbol{p} > 0$ と記すことにする．縦ベクトルについても同様である．

問 1 2 生産品モデルの場合, $t = at + \tau$ に対応する式は,

$$\begin{aligned} t_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \tau_1 \\ t_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \tau_2 \end{aligned}$$

であり, $p > ap + \tau w$ に対応する式は,

$$\begin{aligned} p_1 &> a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + w\tau_1 \\ p_2 &> a_{21}p_1 + a_{22}t_2 + w\tau_2 \end{aligned}$$

と書けることを説明しなさい.

問 2 問 1 の結果を利用して, 横ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して, $\boldsymbol{bp} = w$ が成立しているとき,

$$\boldsymbol{bp} > w\boldsymbol{bt}$$

が成立することを示しなさい. ここで, 横ベクトル $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ に対して, 条件

$$\boldsymbol{bp} = b_1p_1 + b_2p_2 = w$$

は労働の対価である報酬 w によって購入できる生産品の組合せが存在することを表す式である. すなわち, 労働者が労働の対価によって生産品を購入する行動と解釈することができる.

問 3 問 2 で導いた不等式より, $\boldsymbol{b\tau}$ が 1 以下であること示しさなし.

問 4 $\boldsymbol{b\tau}$ は, 2 生産物モデルにおいて, 労働 1 単位に対す対価 (報酬) である. 問 3 の結果の不等式が何を意味しているか考察しなさい.

課題 4

人や動物が, 香りを知覚する過程は, 特定の化学物質の分子を受容体で受け取ることで生ずる感覚であるとされる. 香りの原因となる分子の多くは, 炭素と水素を骨格とする空間幾何構造を持った有機物質である.

受容体との分子の反応には分子の形とそれを受容する受容体とが, あたかもパズルのように一致すると考えることができる. このことを受容体説ということにする.

量子力学に従えば, 個々の分子は特定の周波数で振動していると考えることができる. これを分子振動という. 人間や動物が香りを分別するのは, 分子振動を判別していると考えることもできる. このことを振動説ということにする。

問 1 香りの知覚において, 分子振動が知覚に及ぼす性質を実証するためには, どのような実験を用意し, そしてその実験から, どのような結果が得られれば良いかを考えてください.

問 2 分子振動が知覚に及ぼす影響を否定し, 分子の幾何学的な構造のみが, 香りの知覚に及ぼす性質を実証するためにはどのような実験を用意し, そしてその実験から, どのような結果が得られれば良いかを考えてください.

問 3 受容説, 振動説, 両方を示唆する実験結果が得られた場合には, 第 3 の嗅覚モデルを考える必要がある. 例えば, どのようなモデルが考えられるか示しなさい.

参考

1 つの陽子と 1 つの中性子からなる原子核を持つ重水素は, 通常の水素と同じ科学的性質を持っている. しかし, 質量が異なるためその物理的性質は異なっている. このような物質を同位体という.

電磁波としての振動方向が一定である光を直線偏光という. 直線偏光した光をを物質に照射したときに, 化学式が同じでも, その透過光が, 左に旋回するも, 右に旋回するものとが存在することがある. これらの物質の立体幾何構造は互いに鏡像になっている. このような物質を光学的異性体, あるいは鏡像異性体という.

物質の幾何学的構造が決まると, 構成要素の質量と幾何学的構造とが決まると, その分子振動の固有振動数を, 太鼓や鐘の音を決めるように計算で決定することが可能である.

ロボットの部

課題 KJunior が用意してあります．各自でロボットの動作課題を考え，その動作を実現しなさい．どのような動作課題を考えたかレポートを作成してください．　動作の独創性，　面白さを評価します．動作実演は 7 月 17 日の午後 3 時に始めます．それまでに，動作プログラムを完成させてください．