

第19回数理科学コンクール課題解説

平成28年11月3日 千葉大学先進科学センター

目 次

はじめに	2
優秀者氏名	4
1 課題 1	7
課題	7
解説	7
講評	9
2 課題 2	11
課題	11
問 1	11
問 2	12
講評	13
3 課題 3	14
課題	14
解説	16
4 課題 4	18
課題	18
解説	18
5	21

はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第15回数理科学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講評会を行う。

過去18回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第19回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

千葉大学教授 井宮 淳
東京慈恵会医科大学教授 植田 毅
(五十音順)

平成 28 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 28 年 7 月 17 日と 18 日に開催しました第 16 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

第 19 回数理科学コンクール優秀者

金樺賞	片岡知徳 松丸 愛 岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希
銀樺賞	黒田清加 宮原雄太 栗山 悠 市川直杜 井手祐樹 浅香元春 川島ゆい 齊藤芳希 川口虎琉 上村涼太 堀口裕哉 寺井麟太郎 河村瞭我 藤井万瑠水 鈴木愛澄 竹内量涼香 白倉有理沙 金子愛利珠 小橋龍人 工藤拓翔 櫻井祐太郎 望月咲百合 萩野友惟
学長賞	金丸将之 望月美緒奈 岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希
機巧賞	北田千賀子 鄭 旭 小野雄大 倉金広匡 石野晃平

課題	参加者名
1	黒田清加 片岡知徳 松丸 愛 小橋龍人 工藤拓翔 櫻井祐太郎 望月咲百合 萩野友惟 宮原雄太 栗山 悠 市川直杜 白倉有理沙 金子愛利珠 藤井万瑠水 鈴木愛澄 竹内量涼香 齊藤芳希 川口虎琉 上村涼太 井手祐樹 浅香元春 川島ゆい
2	金丸将之 片岡知徳 松丸 愛
3	岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希
4	望月美緒奈 岡田正大 櫻井 駿 笹井洸希 片岡知徳 松丸 愛 堀口裕哉 寺井麟太郎 河村瞭我

千葉大学先進科学センター長
教授 加納博文

課題の部

1 課題 1

課題

誰しも子供のころにゴム風船で遊んだことがある。うっかり膨らませ過ぎたり、尖ったものにぶつけて割れてしまった経験を持つだろう。そのゴム風船の割れ方は、細かな破片になってしまったり、大きく切り裂かれてしまったり様々である。その割れ方は、ゴムの厚みのムラにもよるかもしれないし、無秩序に見える。果たしてそうなのだろうか？そこには隠れた法則性があるのかもしれませんが。風船の割れ方の法則性を見つけてください（ただし、ないのかもしれない）。

風船は風船の先端をカッターで突くことによって、割ることとします。風船の膨らませ方を変えることによって、割れ方がどのように変化するか？風船の種類によって割れ方が違うのか？色々な条件で考えてみてください。

解説

この課題を見たときに、皆さん、「そんなの、風船のゴムの薄いところが破けるんじゃないの？」、「風船のゴムなんか製造段階でムラがあるだろうから、ここの風船それぞれバラバラなんだから調べたところで物理法則が現れてくるとは思えない」と思ったのではないのでしょうか？

しかし、不規則そうなのに、何がしかの規則が働いているように思える身近な現象は多々あります。沼とか田んぼが干上がった時、その土はとても一様のように思えないけれども、大体、ひび割れはおよそ六角形になっていたりします。みそ汁の中のつぶつぶの対流も六角形の領域を単位に起こってたりします。また、稲妻、ガラスのひび割れもそれぞれは不規則な形をしているけれども、どの形もその形だと認識できる似た構造になっています。特に、ひび割れがどのように発生、進展するかは、建物などのコンクリート、航空機などの金属疲労など我々の日常生活の安全に密接に関係しており、工学的には非常に重要な研究テーマとなっています。

この課題のゴム風船の破裂も、物理的に見ると亀裂がどのように進展、分裂するのかその法則性を見出すということになります。

この課題は科学論文

Sébastien Moulinet and Mokhtar Adda-Bedia: “Popping Balloons: A Case Study of Dynamical Fragmentation”, PRL, 115, 184301 (2015)

を元にしています。PRLとはPhysical Review Lettersの略でアメリカの物理学会（American Physical Society）が発行している物理関連の学会系論文誌では最も権威のあるものです。

この論文が何を研究しているかというと、正に風船がどのように割れるのかを研究しています。この論文を発見したとき、「よくまあ、こんなことを研究しようと思ったな...」と思いましたが、その研究テーマをPRLに計算できるところまで持って行く能力は流石と言わざるを得ません。この論文の著者はフランスの大学に所属していますが、このような変わった研究をしている論文を見つけると、大体フ

ランスであることが多いです。やはり、古き良き時代の貴族の道楽としてのサロンの自然科学研究が根をおろしている結果なのかもしれません。

要するに、この課題はこの論文の内容を短時間かつ原始的な道具で再現してもらったということです。この論文がどのような結果を得ているのかを紹介します。

この論文では図1のように、天然ゴムのシートを両側に穴の開いた板で固定し、そのゴム膜に空気を送り込んで膨らませ、自然に破裂させたり、刃物で亀裂を入れ破裂させています。その様子を1秒間に

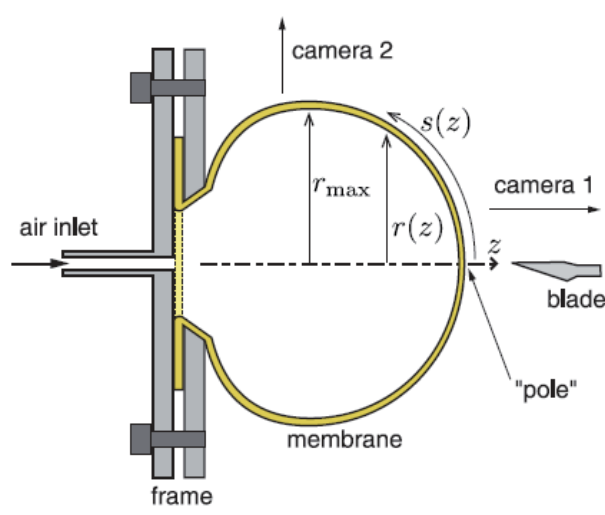


図 1: 測定装置

30000 もしくは 60000 コマの超高速カメラで動画撮影して、亀裂がどのように進展するかを調べています。

まず、亀裂はゴム膜にかかる張力 T (幅 1m の膜を幅に垂直に引っ張る力) がある閾値 T_c より小さい場合は、図 2 (a) のように最初に入れた切れ込みが風船全体に広がり割れるように、放射状に 2 つもしくは 3 つの亀裂が見られる (opening regime と呼ばれる)。

その閾値を超えると、亀裂は最初のものから、放射状に枝分かれし、ゴム膜を多くの破片に分割します (図 2 (a))。破裂後のゴム膜は図 2 (c) のようになります。多い場合には 64 もの破片に分割します。亀裂は、図 2 (d) のように 2 つに枝分かれします。張力はゴムが膨らむと大きくなるので、風船はある程度以上膨らませると細かな断片になることになります。

図 3 には、いろいろな膜厚の場合について、張力 T を膜厚 e で割った量 T/e (これは膜の単位断面積にかかる引っ張る力 (応力という) である) に対して破裂後の亀裂数 N_f を示してあります。この図から、亀裂の数は、膜厚には関係なく、応力 T/e に比例することが分かります。

図 4 (a) は亀裂の長さ s の時間変化を色々な張力 T の場合について示している。どの張力の場合にも亀裂の長さは時間に比例することが分かります。このグラフの傾きは亀裂が進展する速度を表しています。図を見ると、張力が小さな場合、つまり、亀裂が枝分かれしない場合には、張力が大きくなるにつれて亀裂の進展速度が大きくなり、張力がある大きさ以上になると亀裂の進展速度は変化しなくなります。その速度の上限は $v = 570 \pm 15 \text{ m/s}$ となり、これは膜を伝わる音の速度に等しい。図 4 (b) から頂

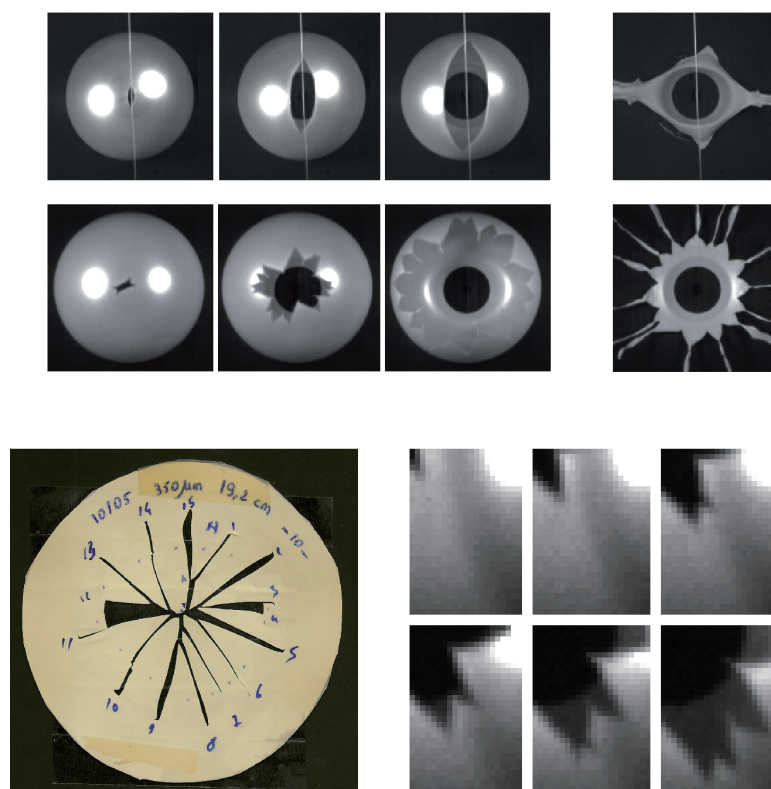


図 2: 2 つの異なる破裂形態. (a) opening regime 2 つもしくは 3 つの亀裂が入る. (b) fragmentation regime 1 つの亀裂が多数に分裂し, ゴム膜が細かな破片に分割される. (c) 多数に分裂した状態 (膜の厚み $350 \mu\text{m}$) (d) (c) の拡大

点から始まった亀裂は, 張力が小さな場合には遠くまで行っても数は変わらないが, 張力が閾値を超えると, 頂点から離れるほど数が増えることが分かります.

このように, とりとめもなさそうな問題にも色々普遍的な法則が見いだされることが分かります.

講評

実験材料, 道具の手配の手違いで, 実験し難かった状況も影響してか, なかなか苦勞したようです. この実験のポイントは, どの実験条件を固定し, 何を変化させるのかを決定し, 計画的に実験を行い, 結果をシステマティックにまとめ, 分析することです.

なかなかとらえどころがなく苦戦した様子でした. 実際, この課題に解答していた答案は非常に少数でした.

多くの実験では単に 2 つに割れたという結果が示されていました. これは, opening regime から抜け出せていなかったことになります. しかし, 2, 3 の答案では亀裂の分裂を見出したものがあり, 高く評価しました. また, 実験の計画をしっかりと表現できていたものを高く評価しました.

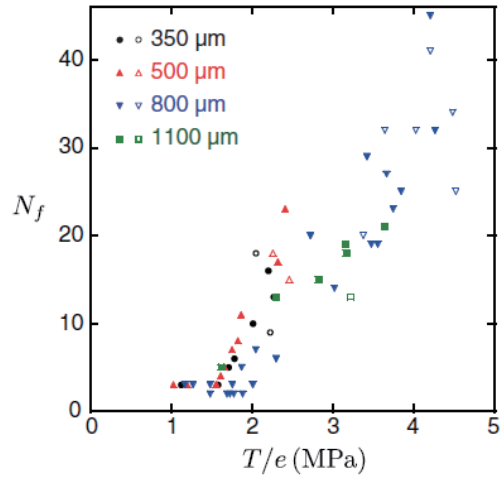


図 3: 最終亀裂数 N_f の応力 T/e 依存性. ここで, e は膜厚.

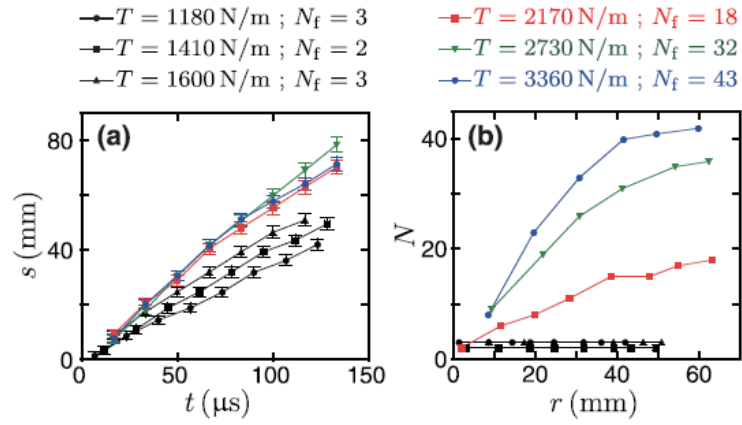


図 4: (a) 亀裂の長さの時間変化. (b) 風船の軸からの距離に対する亀裂の数の変化.

2 課題 2

課題

問 1 生物学の分野には

アレンの法則

恒温動物において、同じ種の個体、あるいは近縁のものでは、寒冷な地域に生息するものほど、耳、吻、首、足、尾などの突出部が短くなる。

ベルクマンの法則

恒温動物においては、同じ種でも寒冷な地域に生息するものほど体重が大きく、近縁な種間では大型の種ほど寒冷な地域に生息する

という法則がある。これらの法則が成り立つ理由を物理的に考察してください。

問 2 決まった水の量で発熱している人の体を効果的に冷やすためにはどのように冷やすのがいいか考察してください。(看護学では頭を冷やすのではなく、血流が体表に近い、脇の下などを冷やすように教わりますが、冷やす部位についてではなく、水をどのように用いるかを考察してください。) ただし、水と氷嚢以外は用いず、熱は水以外に伝わることはないとします。

解説

問 1

生物の体では体を構成する細胞一つ一つがエネルギーを消費し、熱を発生します。したがって、生物の発熱量は体積、質量に比例します。他方、生物の体から熱が奪われるのは、熱伝導と熱放射が考えられますが、地上では熱伝導の大きな効果を持ちます。熱伝導では熱は体表面から流れ出るので、流出する熱量は表面積に比例します。

したがって、寒冷地で体温を奪われないようにするためには、表面積を小さくすればよいので、突起物はできるだけなくす方がよいということになります。

また、ある生物の典型的な長さ（例えば、身長など）を L とすると、身体の体積は L^3 に比例し、他方、身体は表面積は L^2 に比例します。身体からできるだけ熱を逃がさないためには、単位体積当たりの表面積が小さければよいので、 $L^2/L^3 = 1/L$ を小さくする、つまり、身体が大きな方が有利ということになります。

問 2

救急医療では緊急時にはアルコールや冷水を全身にスプレーして全身を冷やしますが（体を冷やし過ぎてしまうこともあるので要注意），ここでは，限られた量の水をどのように使ったらより効果的に体を冷やせるかを考えてもらいました．

大雑把に言えば，全部を一度に使うのか，小分けにして使うのかということです．どちらが効果的なかを物理的に考察する課題でした．

人の質量（体重）を $M\text{kg}$ ，比熱を $C\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ ，体温を $T^\circ\text{C}$ ，利用できる水の量を $m\text{kg}$ ，水の比熱を $c\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ ，元々の水温を 0°C とする．ここでは，水を使うと氷が解ける効果を考慮しないといけないので，話を簡単にするため水温にした水を使うことにします．

もともと人に蓄えられた熱量 Q は

$$Q = MCT$$

であるから，全ての量の水を一度に使うと，人の体温と水温が同じになった時の温度 T' は

$$\begin{aligned} Q &= MCT \\ &= (MC + mc)T' \\ T' &= \frac{MC}{MC + mc}T \end{aligned}$$

となります．

水を N 回に分けて， $m/N\text{kg}$ ずつ使うと考えましょう．人の体温と水の温度が同じになったら，温まった水を捨て，冷えた水に交換することとします．1回目で温度は

$$T_1 = \frac{MC}{MC + \frac{m}{N}c}T = \frac{1}{1 + \frac{mc}{MC} \frac{1}{N}}T$$

となるので，これを N 回繰り返すと，体温は

$$T_N = \left(\frac{MC}{MC + \frac{m}{N}c} \right)^N T = \left(\frac{1}{1 + \frac{mc}{MC} \frac{1}{N}} \right)^N T$$

まで冷やすことができます．

結局， T' と T_N はどちらが小さいかという問題になります．数学的に

$$\frac{1}{1+x} > \left(\frac{1}{1+\frac{x}{N}} \right)^N$$

であることが示されるので， $T' > T_N$ となり，小分けにした方がより効果的に冷やすことができることが分かります．

また，非常に小まめに水を交換するようにすると，数学的には $N \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{mc}{MC} \frac{1}{N}} \right)^N T = e^{-\frac{mc}{MC}} T$$

となります．ただし， e は自然対数の底です．

小まめに水を交換するとよく冷えるのは，温まった水を交換することで人体に蓄えられた熱を小まめに外に捨てているからです． $N \rightarrow \infty$ の極限と言うのは，結局，流水で冷やすのと似た状況だと言えます（ただし，今の場合は水と体温が同じになるまで待つことを仮定しています）．

講評

問1はほとんどの答案が正解していました。評価が分かれたのは問2です。問2はいろいろ奇抜な案が示されていましたが、物理の問題としてしっかりと考察、論証されたものはあまりありませんでした。水を飲ませると言う案もありましたが、身体の中に取り込んでしまうので熱を捨てられないという意味で一度に水を使ってしまう方法と効果は変わりません。

水を循環させるという案もありましたが、ただ温まった水を循環させても仕方がないので、その水をどう冷やすかの考察が必要です。また、装置の問題もあります。

また、流水で冷やすという提案もありました。これは限られた量の水ではなかなか難しいのですが、概念としては正しいものです。この案は高く評価しました。

全身にスプレーするという案もありました。これは救急対応として理にかなったものです。

しかし、何故その方法が効果的なのかと言う根拠をちゃんと示したものがあまりありませんでした。色々な案がありましたが、しっかりと、その方法がなぜ効果的なのか、物理的にしっかり考察できているものを高く評価しました。

3 課題 3

課題

数学を使って、マルクスがその著書「資本論」で展開した搾取の理論を証明しよう。そのために、まず、1 品種の資産品 (例えば、石油) を生産する経済モデルから始める。

石油 1 バレルを生産するための労働時間を τ とする。石油 1 バレルを産出するためには、やはり石油を a バレル投入する必要があると考える。ここで、 $0 < a < 1$ である。このとき、石油 1 バレルを生産するために必要な全労働時間 t は

$$t = at + \tau$$

の解 $t = \frac{\tau}{1-a}$ である。

次に、労働と対価の関係を調べる。石油 1 バレルの販売価格を p 、労働者に支払われる 1 時間当たりの賃金 (労働の対価) を w とすると、儲けが出るためには

$$p > ap + w\tau$$

が成立する必要がある。2 つの式より

$$p > tw$$

を得る。不等号の右辺は石油 1 バレルを生産されるために支払われる対価である。したがって、

$$p - tw$$

が資本家の利潤になり、「労働者は自分の労働に見合うだけの対価を受け取ることは決してない。」と結論できる。

マルクスはその著書「資本論」の中で、産業革命後の経済を考察し、この関係を導いた。ただし、ここで、述べたような数式では書かれていない。一方、多数の生産品が存在する経済下での搾取の定式化は、近代経済学として 1950 年代から 1960 年代にかけて、日本の経済学者、置塩信雄、森嶋道夫 (英国で活躍) によって定式化された。

以下では、行列とベクトルを利用して、2 生産品モデルで搾取の関係式を証明することを考える。2 生産品として、仮に、石油と電力を考えることにする。

数学的準備として、行列とベクトルの演算の説明から始める。以下では、記号は実数を表すことにする。

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ を横ベクトル、 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を縦ベクトルと呼ぶ。横ベクトルと縦ベクトルの間に演算

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2$$

を定義する。この演算を内積と呼ぶ。内積の値は実数であることがわかる。また、要素 x_1 x_2 y_1 y_2 がすべて正であれば内積の値も正である。

次に数の表

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

を行列という. 2つの行列の間の和と積は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

とする. 一般には $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ である.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を単位行列という. 単位行列に対して, $\mathbf{AI} = \mathbf{IA}$ が成立する. さらに,

$$\mathbf{XA} = \mathbf{I}, \mathbf{AX} = \mathbf{I}$$

の解 $\mathbf{X}$ を $\mathbf{A}$ の逆行列と呼び $\mathbf{A}^{-1}$ で表す. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ であるとき, 逆行列が存在し

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

である.

行列をベクトルに作用させる演算

$$\mathbf{Ay} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{xA} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (x_1a_{11} + x_2a_{21}, x_1a_{12} + x_2a_{22})$$

を定義する. 縦ベクトルに行列を作用させるとその結果は縦ベクトルになり, 横ベクトルに行列を作用させるとその結果は横ベクトルになる. これらを線形変換という. 行列とベクトルの順に注意すること.

さらに, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ について $p_1 > 0, p_2 > 0$ であるとき $\mathbf{p} > 0$ と記すことにする. 縦ベクトルについても同様である.

問 1 2 生産品モデルの場合, $t = at + \tau$ に対応する式は,

$$t_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \tau_1$$

$$t_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \tau_2$$

であり, $p > ap + \tau w$ に対応する式は,

$$p_1 > a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + w\tau_1$$

$$p_2 > a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + w\tau_2$$

と書けることを説明しなさい.

問 2 問 1 の結果を利用して, 横ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して, $\mathbf{b}\mathbf{p} = w$ が成立しているとき,

$$\mathbf{b}\mathbf{p} > w\mathbf{b}\mathbf{t}$$

が成立することを示しなさい. ここで, 横ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して, 条件

$$\mathbf{b}\mathbf{p} = b_1p_1 + b_2p_2 = w$$

は労働の対価である報酬 w によって購入できる生産品の組合せが存在することを表す式である. すなわち, 労働者が労働の対価によって生産品を購入する行動と解釈することができる.

問 3 問 2 で導いた不等式より, $\mathbf{b}\mathbf{\tau}$ が 1 以下であることを示しなさい.

問 4 $\mathbf{b}\mathbf{\tau}$ は, 2 生産物モデルにおいて, 労働 1 単位に対す対価 (報酬) である. 問 3 の結果の不等式が何を意味しているか考察しなさい.

解説

社会現象や経済現象を数理的に考察する研究には, 簡潔な解析の故に, 後世に影響を与えた成果が多数あります. その中でも, 経済政策に影響を与えた, 古い出版物はマルサスによる「人口論」であろう. マルサスはその中で, 前提

1. 食糧 (生活資源) が人類の生存に必要である。
2. 異性間の情欲は必ず存在する。

の元で, 次の原理

- 人口は幾何級数 (等比級数) 的に増加する。
- 食料生産は算術級数 (等差級数) 的に増加する。

を見出した。つまり、生活資源生産が人口増加に追い付かないことが示した。この関係を、貧困等の問題を生むことの根拠とし、その解決策を論じることとなった。2つ性質の中で、第1の人口増加に関する性質は、マルサスと同時代18世紀の米国の人口変動の結果を例として示している。19世紀には英国において、経済現象の動向を、統計学を駆使して捉える研究が生まれました。

マルクスは、19世紀のロンドンの労働者の状態から、(現在の手法で言うならば、統計的に解析し) 搾取を表す関係を導き出しました。この間の経緯については、ドイツ連邦共和国、トーリアにあるマルクス博物館 (マルクスの生家) の展示に経緯が説明されています。マルサスの時代から当然、貧困は問題でした。マルクスの時代には、英国においては産業革命が後期も終わりに近づき、労働者の貧困がさらに社会的な問題となっていました。なお、種々の経済統計や、社会統計から社会の構造を考察手法は、経済学的手法として現在まで受け継がれ、その立場に立ち、経済学の原点に立ち戻ったとして話題になった書籍がピケティの「21世紀の資本」です。

講評

2×2 次行列を説明に従って計算を進めれば、搾取の性質を説明する不等式が導出されます。説明と定義に従って数式を展開する姿勢、数式が導く結果を経済学の言葉で解釈することを、課題では課しました。素直に、数式を読み解く姿勢は、先入観なしに新しいことに取り組む基本的な姿勢です。また、それぞれの分野において、数式や方程式の意味を、それぞれの分野の言葉、用語で解釈し、説明することは、数理解析の基本であり、どの分野に進んでも要求される能力です。

4 課題 4

課題

人や動物が、香りを知覚する過程は、特定の化学物質の分子を受容体で受け取ることで生ずる感覚であるとされる。香りの原因となる分子の多くは、炭素と水素を骨格とする空間幾何構造を持った有機物質である。

受容体との分子の反応には分子の形とそれを受容する受容体とが、あたかもパズルのように一致すると考えることができる。このことを形状説ということにする。

量子力学に従えば、個々の分子は特定の周波数で振動していると考えることができる。これを分子振動という。人間や動物が香りを分別するのは、分子振動を判別していると考えられる。このことを振動説ということにする。

問 1 香りの知覚において、分子振動が知覚に及ぼす性質を実証するためには、どのような実験を用意し、そしてその実験から、どのような結果が得られれば良いかを考えてください。

問 2 分子振動が知覚に及ぼす影響を否定し、分子の幾何学的な構造のみが、香りの知覚に及ぼす性質を実証するためにはどのような実験を用意し、そしてその実験から、どのような結果が得られれば良いかを考えてください。

問 3 嗅覚に関する形状説、振動説、両方を示唆する実験結果が得られた場合には、第 3 の嗅覚モデルを考える必要がある。例えば、どのようなモデルが考えられるか示しなさい。

参考

1 つの陽子と 1 つの中性子からなる原子核を持つ重水素は、通常の水素と同じ科学的性質を持っている。しかし、質量が異なるためその物理的性質は異なっている。このような物質を同位体という。

電磁波としての振動方向が一定である光を直線偏光という。直線偏光した光を物質に照射したときに、化学式が同じでも、その透過光が、左に旋回するも、右に旋回するものとが存在することがある。これらの物質の立体幾何構造は互いに鏡像になっている。このような物質を光学的異性体、あるいは鏡像異性体という。

物質の幾何学的構造が決まると、構成要素の質量と幾何学的構造とが決まると、その分子振動の固有振動数を、太鼓や鐘の音を決めるように計算で決定することが可能である。

解説

古くから、日本には香道として、香木の香りを楽しむ芸道が宮廷文化に始まり現在まで続いています。しかし、現在の日本では、消臭剤や柔軟剤に含まれる香りを気にすることはありますが、日常生活の於いて、臭いを話題にすることがあっても、香りを話題にすることはあまり無いようです。「匂いエチケット

ト」と銘打って香水の宣伝を始めたのに、アレルギーの関係から苦情を受けていつの間にか宣伝がなくなってしまった事件も記憶に新しい出来事です。かつて日本に留学していた中国人学者が、出題者に対して、彼が日本に初めて降り立ったときに感じたことは「無臭の国」だったと回顧していました。

食物の味は、味覚だけでなく、口蓋から鼻腔に抜ける匂いも影響しているともいわれています。また、練歯磨き、筋肉痛のシップなど、さまざま日用品に香りが付加されています。これらの匂いには、果物や花の自然の香りに由来した香剤もありますが、ほとんどは化学的に合成されています。そのため、香剤開発は薬剤開発と同様、世界を市場とする産業になっています。そこで、香剤設計・合成の立場から、匂いの知覚に関する量子科学的性質を考察することを課題としました。

講評

量子力学的ということから「難しいことを要求している。」と勘違いした参加者が多数いました。課題の本質は、目に見えない物質にもそれぞれ固有の形があること。また、それぞれ固有の振動数で振動していることです。この性質は、物質を量子力学的に扱わないと導くことができない性質なので、量子力学の説明をしました。文章から、自分の知識に見合った本質を読み取る能力が大切です。

匂いの振動説を支持する実験は、行動生物学における T 字迷路法を使って行われました。T 字迷路法では、入り口が 1 つ、出口が 2 つある T 字型経路を利用し、どちらの出口に実験対象動物が出ていくかによって、動物の行動や、学習過程、記憶形成を観察する実験手法です。

匂いの振動説を実証する実験は、ハエを使い以下の様に行われました。

1. ハエがアセトフェノンの匂いをかぎ分けるか調べる。
2. T 字パイプの一方にアセトフェノンを染み込ませた布を置き、ハエがどちらの出口に多く集まるか調べる。
3. 次に、アセトフェノンの水素の 3 個、5 個、8 個を重水素に置き換えた物質を反対側の出口に置き、ハエがどちらの出口に進むか調べた。

結果は、以下の様であった

- 3 個の重水置換の場合は、ハエの出口選択はランダムであった。
- 5 個あるいは、8 個の重水置換の場合には、ハエは置換した物質を置いた出口を避けた。

このように、「匂い」という、産業上重要な物質の性質を探ることに、その製法や、香りを出す物質の性質だけでなく、行動生物学の手法も取り入れた実験が必要になってきます。

学長賞は、粗削りではあるが、T 字迷路法を指摘した解答に与えました。

文献

Maria Isabel Franco, Luca Turin, Andreas Mershin and Efthimios M. C. Skoulakis:
Molecular vibration-sensing component in *Drosophila melanogaster* olfaction, Proceedings
of National Academy of Sciences, Vol. 108, 3797-3802, 2011.

ロボットの部

5

課題

KJunior が用意してあります。各自でロボットの動作課題を考え、その動作を実現下さい。どのような動作課題を考えたかレポートを作成してください。動作の独創性、面白さを評価します。動作実演は 7 月 18 日の午後 3 時に始めます。それまでに、動作プログラムを完成させてください。

講評

命令の数、動作の連続性、動作の正確性を基準とし、主催者、補助者の祭典、参加者の相互採点の合計点の、上位参加者を機巧賞としました。

主催者の都合により、来年度から使用ロボットを変更します。