

第20回数理科学コンクール課題解説

平成29年11月3日 千葉大学先進科学センター

目 次

はじめに	3
優秀者氏名	5
1 課題 1	8
解説	9
講評	11
2 課題 2	13
解説	14
問 1	14
問 2	17
講評	19
3 課題 3	21
解説	23
問 1	23
問 2	23
問 3	23
問 4	23
講評	26
補遺	26
4 課題 4	27
課題	27
解説	28
講評	29
課題 4 の文献	30
5 ロボットの部課題	32

はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第20回数理科学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講評会を行う。

過去19回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第20回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

千葉大学教授 井宮 淳
東京慈恵会医科大学教授 植田 毅
(五十音順)

平成 29 年 11 月 3 日

優秀者氏名

平成 29 年 7 月 15 日と 16 日に開催しました第 20 回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

第 20 回数理科学コンクール優秀者

金樺賞	小田島洋斗 一色要 石牟禮碧衣 橘武志 新藤春樹 萩野友惟 望月咲百合
銀樺賞	松浦佑奈 河野宙 村上芽生 中墓明日香 佐賀晴樹 浅野宏太 吉武廉 長井舜介 木下晴登 末雄光
学長賞	日東寺智大 西村友宏
機巧賞	真壁一史 中野春樹 早川航平

課題	参加者名
1	橘武志 新藤春樹
2	小田島洋斗 一色要 石牟禮碧衣 萩野友惟 望月咲百合
3	松浦佑奈 村上芽生 中臺明日香 長井舜介 木下晴登 末雄光
4	日東寺智大 河野宙 小田島洋斗 一色要 石牟禮碧衣 佐賀晴樹 橘武志 新藤春樹 淺野宏太 西村友宏 吉武廉 萩野友惟 望月咲百合

千葉大学先進科学センター長
教授 高橋 徹

課題の部

1 課題 1

体の中には血管や食道, 腸など様々な管がある. これらは全て細胞でできている. 毛細血管のように非常に細く, 薄い細胞の膜でできた管を考えよう. 図 1 に示すように, 管が同じ大きさの六角形の細胞のみでできているとすると, 管の太さなど形や性質についてどのようなことが分かるか考察しなさい.

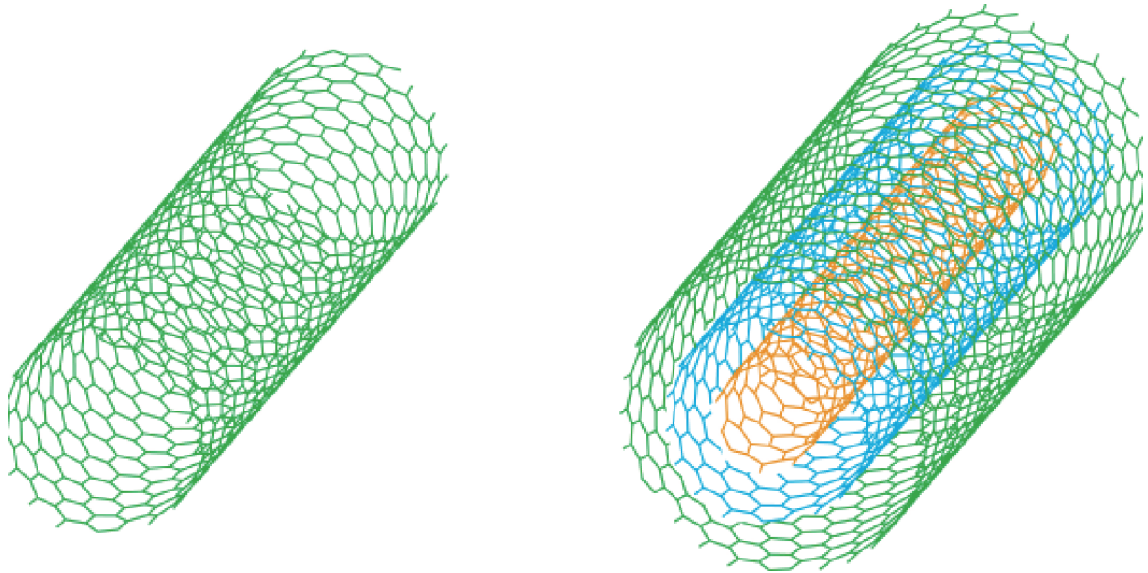


図 1: 六角形網目の管:出典 Uryu Group, Iwate Univ. web.cc.iwate-u.ac.jp

解説

この問題は単純な作図, 幾何の問題のように思われるかもしれませんが, 物理的には非常に重要な概念を含んでいます. この問題を出題しようと思ったのは, 形の科学会誌, 第25巻, 第2号, (2010) pp.186-187 に「細い毛細血管の周長はとびとびの値をもつ?」という, 兵庫大学 (現 神戸大学大学院医学研究院) の本多久夫博士の論文を見かけたのがきっかけです.

その論文では, この課題同様, 同一サイズの正六角形が集まって管をつくるとしてその作り方を考えています. その結果, 細い管の周長が正六角形の辺長を1として, $\sqrt{3}$, 3, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$, $3\sqrt{3}$, 6, $\sqrt{39}$, $4\sqrt{3}$ のようにとびとびの値をもつことがわかった, としています.

その中では, 蜂の巣格子から図2のように切り出した管を考えています. 巻き方には, 図2の a, c, e, h

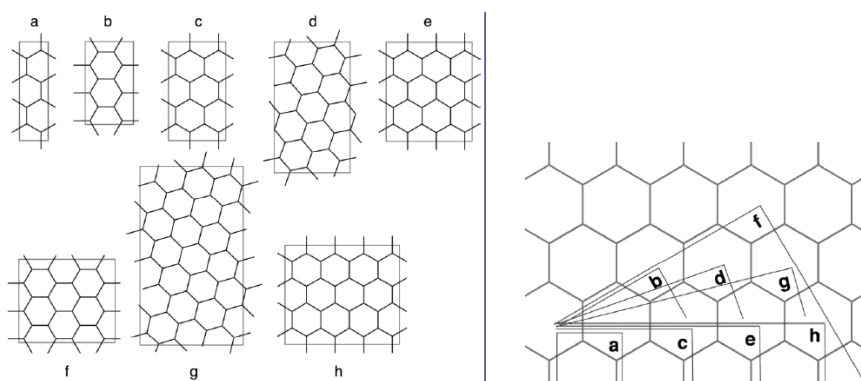


図 2: 管を作る蜂の巣格子の平面図

のように正六角形の平行な辺が縦向き (管の軸に平行) になるように巻く方法と, 図2の b, f のように正六角形の平行な辺が横向き (管の軸に垂直) になるように巻く方法, 他に図2の d, g のように左右の境界がうまく対応すれば斜めに巻く方法も可能です. 縦向きの場合, 周長は $\sqrt{3}$ の整数倍, 横向きの場合, 周長は3の整数倍となる.

図2 a から h の平面図を管にすると図3のような管になります. つまり, 細い血管は太さが離散的に

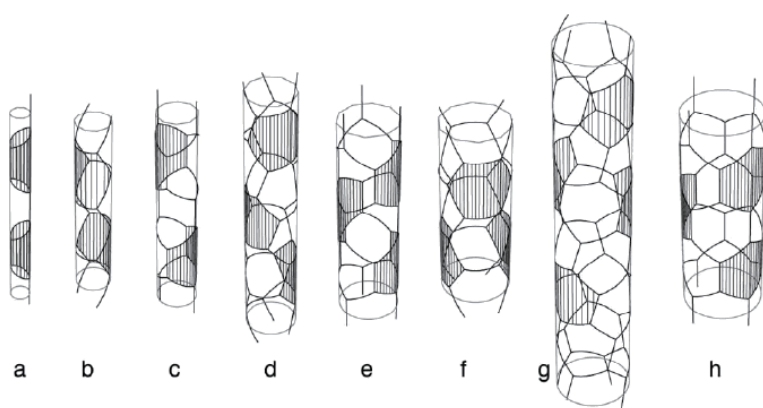


図 3: a から h の平面図を巻いてできる管

なっているということになります。ただし、実際には細胞は変形することが可能であるので、その論文の中では「ここでの述べたような形が実現しているところが実際にあるのかどうか不明である。」と述べられています。しかし、この話がそのまま成り立ち、巻き方により、その性質が変わってしまう物質が存在します。

1991 年, NEC の主席研究員 (当時) 飯島澄男博士により世界で初めて発見された, 炭素原子が蜂の巣状に結合し, 筒状になった分子構造の物質, カーボン・ナノチューブ (CNT) です。CNT は単層のものをシングルウォールナノチューブ (SWNT), 多層のものをマルチウォールナノチューブ (MWNT) と呼びますが, ここで考えているのは正に SWNT に他なりません。CNT は発見以来, 物理, 化学, 材料科学, 機械など様々な分野から注目され, その物性が精力的に研究されてきました。

SWNT はグラファイトシート (炭素原子が蜂の巣状に結合したシート) の巻き方により, 下の図 4 のように, 左から アームチェア型, ジグザグ型, カイラル型の 3 種類に分けることができます。

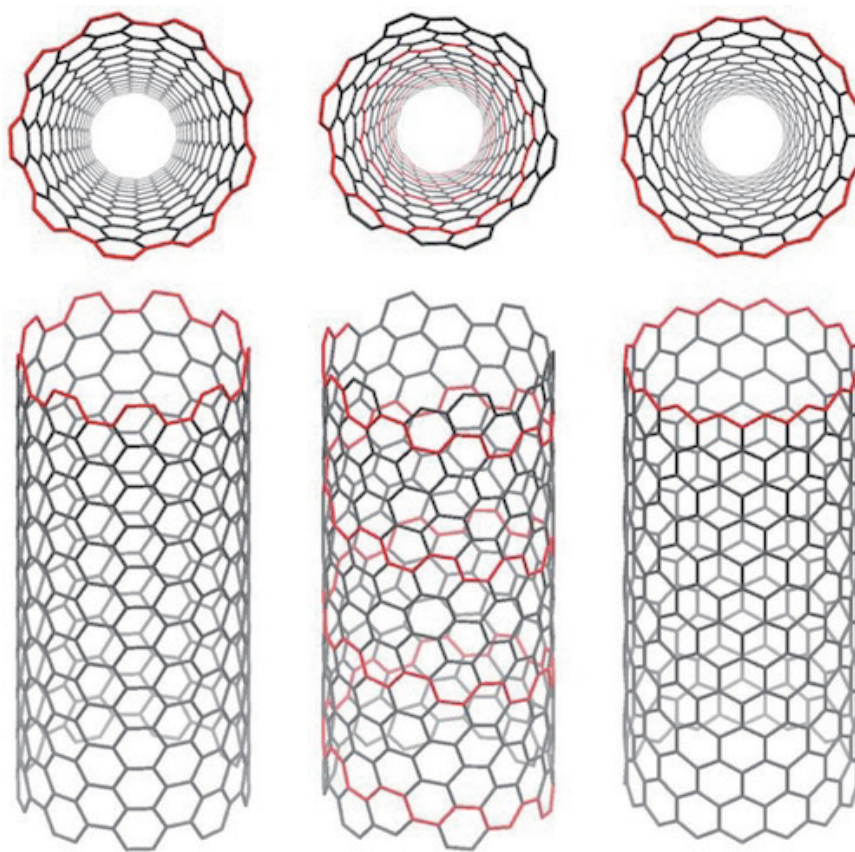


図 4: 単層カーボンナノチューブの構造. 左から、アームチェア型, カイラル型, ジグザグ型. 出典: <http://news.mynavi.jp/news/2012/07/20/003/>

形の違いを数学的に表現するために, 図 5 のように座標とカイラルベクトル, 並進ベクトル, 螺旋角を定義します。

グラフェン上のある六角形の基準点からの 2 次元格子ベクトルをカイラルベクトルと呼びます。グラ

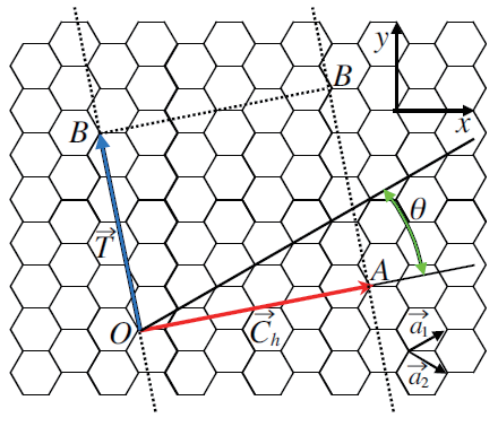


図 5: カーボンナノチューブの展開図. 出典:佐伯尚志; カーボンナノチューブのバンド構造, 青山学院大学 理工学部 物理学科 卒業論文, (2003)

ファイトシートの格子ベクトルを $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ とすると, カイラルベクトルは

$$\vec{C}_h = n\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 \quad (1)$$

と表すことができます. 但し, n, m は整数で, $0 \leq m \leq n$ とします. このベクトルを指数化した (n, m) はカイラル指数とよばれ, チューブの直径や螺旋角 (カイラル角) はカイラル指数によって決まります.

チューブの周長 L は

$$L = |\vec{C}_h| = \sqrt{n^2 + nm + m^2}, \quad (2)$$

カイラル角 θ は

$$\cos \theta = \frac{2n + m}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \quad (3)$$

と表されます.

ナノチューブの軸に直角な場合, つまり, (n, n) の場合はアームチェア型, 軸に並行な場合, つまり, $(n, 0)$ の場合はジグザグ型, それ以外の場合はカイラル型になります. また, SWNT はカイラル指数によって性質が異なり, $n - m$ が 3 の倍数のとき金属的性質を持ち, 3 の倍数でない場合は半導体的の特性を示します. 具体的には, 図 6 に示すように, $(0, 0)$ と $(9, 0)$ を重ねるように巻いた場合は金属的な性質を持つ CNT ができ, $(0, 0)$ と $(9, 1)$ を重ねて巻いた場合は半導体的な性質を持つ CNT となる. 現在までに発見されている CNT の中で最も直径の小さなものは, カイラリティが $(5, 0), (4, 2), (3, 3)$ であると考えられている直径約 0.4 ナノメートルのものです.

講評

「管が同じ大きさの六角形の細胞のみでできているとすると」と書いているにもかかわらず, 正方形, 三角形などの網目を考え, その中で蜂の巣格子が最も安定していて丈夫であるという考察を展開した解答が非常に多くありました. 何がしかの参考書にそのようなことが書いてあり, その受け売りであったのかもしれませんが. 中に, みかんを入れるオレンジ色のネットを使って考察したもの数件ありました. み

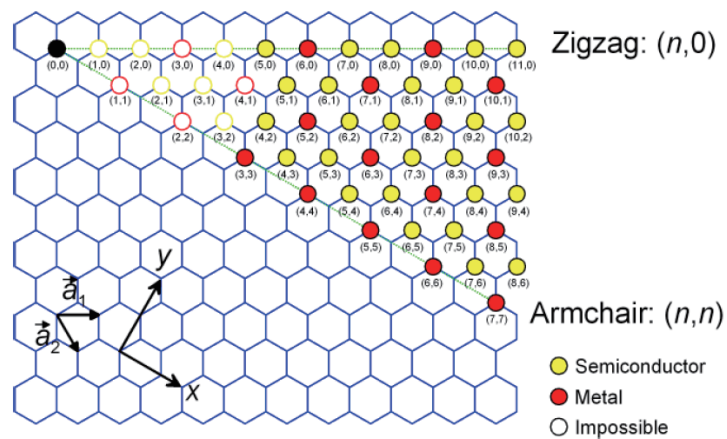


図 6: グラフェンシートの巻き方と SWNT の性質. 出典: <http://www.sanken.osaka-u.ac.jp/labs/se/research/CNT.htm>

かんのネットはそれを意図して用意したもので、よく出題者の意図を汲んでくれました。が、考察の内容は正しい方向に向かったものは少なかったように思います。そのほか、三角方眼紙は六角形を簡単に描けるように用意したもので、それを用いて実際に作ってみるとちゃんと巻けないものがものがあることが分かったと思います。正しく長さを計算で来ているものは多数ありましたが、巻き方が色々あるという点に注目していた解答は極めてまれでした。

2 課題 2

地球上には様々な種類の樹木が生育している。高級家具に使われるような紫檀 (マメ科ツルサイカチ属のうち、銘木として利用される数種の本木) や黒檀 (カキノキ科カキノキ属の熱帯性常緑高木) などのように非常に密度が高く、硬い木もあれば、江戸時代には歯ブラシに利用され、楊枝に使われているしなやかな柳や非常に密度が小さく、柔らかいバルサ (アオイ目パンヤ科) もある。それぞれの樹木が子孫を残してきたのであるが、図 7 のように台風など嵐にあって、折れてしまうこともある。

問 1 では、非常に強い風が吹くときに、樹木が折れないためには、柳のようにしなやかな樹木が有利なのかとても硬い木が有利なのだろうか？ 太さと長さはどのようなものが折れずに済むのか？ 実験をするなどして考察しなさい。



図 7: 倒木:出典 <http://physics.aps.org/synopsis-for/10.1103/PhysRevE.93.023001>

竹は日本の東北以南および東南アジアに自生する熱帯性の植物である。竹の成長速度は非常に速く、直径 15cm ほどのものでも、約 1 年で 10m 以上の高さに成長する。軽くて丈夫で加工しやすいことから、日本では土壁の骨材や天井材など建築材料として広く用いられてきた。中国や東南アジアの国々では、現在でも高層ビルの建築において鉄筋の代わりに用いられることがある。

問 2 竹は高い強度と柔軟性を併せ持つ特異な植物といえる。その性質は竹の構造に負うところが多いと考えられる。竹の構造にはどのような特徴があり、それが強さと柔軟性を持たせるのにどのように寄与しているのか、観察、実験、工作なども踏まえて考察しなさい。

解説

問 1

「そんな場合によりけりじゃないの?」と言いたくなる、とらえどころのない課題に見えるかもしれませんが、しかし、課題の図の出典にもあるように、APS(American Physical Society)が発行する学術論文誌 Physical Review E, vol.93, 023001 (2016) に掲載されている“Critical wind speed at which trees break (木が折れる臨界風速)”という論文でフランスの研究グループがこの問題に果敢にチャレンジしています。この論文の中では、レオナルド・ダ・ビンチやガリレオも木材の抗力について研究していたことを紹介しています。

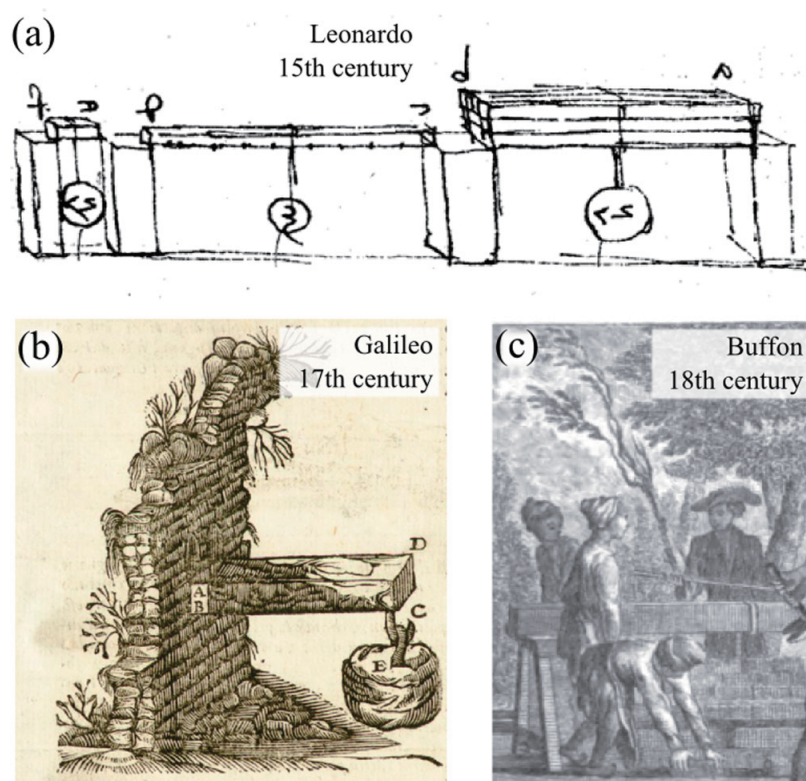


図 8: 木の抗力についての初期の研究.

2009年1月24日にフランス南西部を襲った嵐による最大風速 (a) と折れた木の割合 (b) の分布のデータより、最大風力が 20m/s の地点では樹木の損傷の報告はなく、42m/s を超えると大方の樹木が折れることが見出されています。図 8 の A の地域は松の森で、B の地域は主にブナ、樅の森で、最も速い風速が観測されたこれらの地域では樹木の種類に関係なく極めて深刻な損傷を受けていました。この現象を科学的に検証するために実験と材料力学 (破壊力学) を用いて検証しています。皆さんが行っていたように、片持ち加重での棒の変形を調べています。この場合、棒の変形は棒の曲率半径を棒の長さで割ったもので評価しています。棒の変形、すなわち、曲率半径の長さに対する比が大きい場合と小さい場合でその荷重に対する変化の傾向が変わることを見出しています。

図 12 のように、棒が折れる臨界曲率半径 R_c は長さ L に依存せず、直径 D のベキに依存することが分

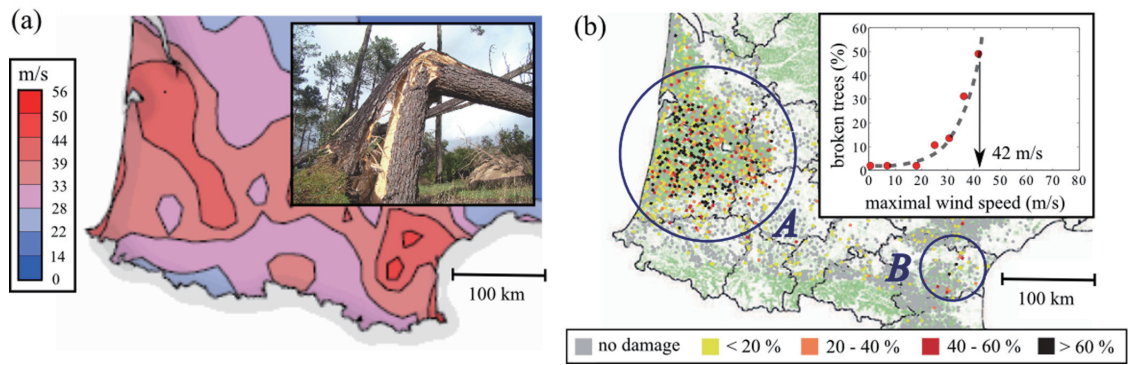


図 9: 2009 年 1 月 24 日フランス南西部を襲った嵐の最大風速 (a) と折れた木の割合 (b) の分布

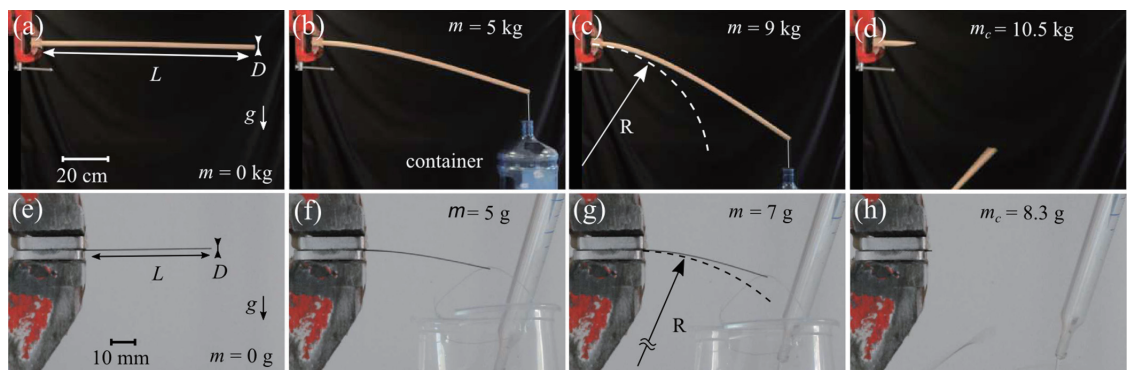


図 10: 先端点加重時の棒の変形. (a)-(d) 木棒, (e)-(h) シャープペンシルの芯

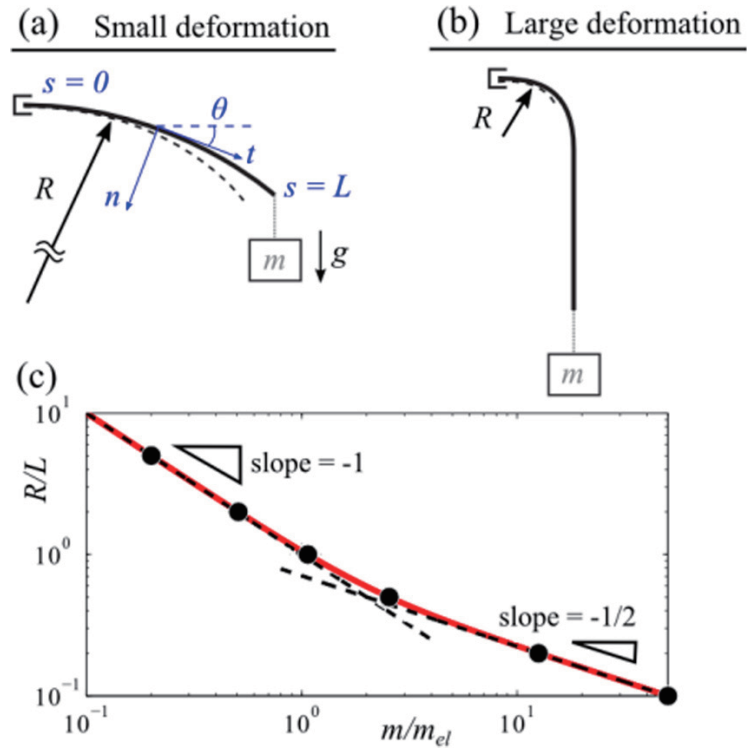


図 11: 棒の曲率半径 R -長さ L 比の荷重 m 依存性.

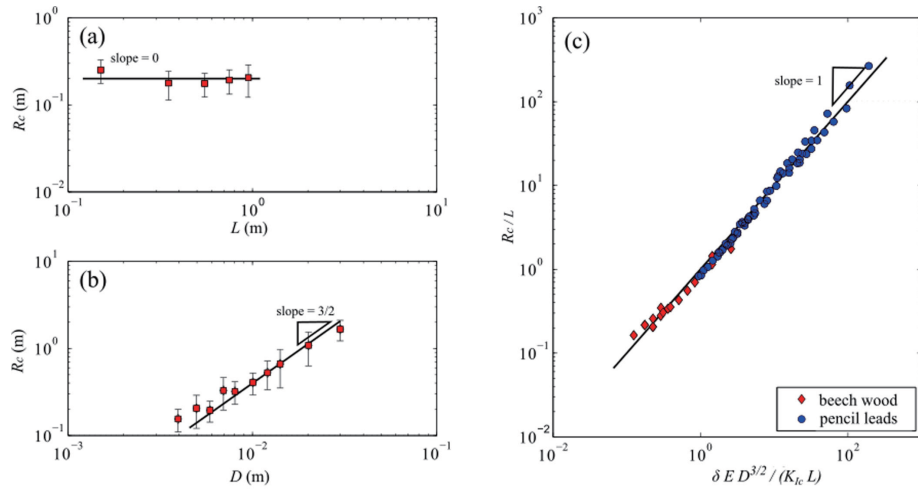


図 12: 棒が折れる臨界曲率半径 R_c の長さ L (a), 直径 D (b) 依存性.

かります。材料力学的考察から、臨界曲率半径 R_c を長さ L で割ったものは直径の $3/2$ 乗、弾性率 E に比例、長さ L に反比例する物理量に対して、グラフを描くと材質にかかわらず同じ曲線になることが分かります。棒に横から風を当てたときの曲率半径 R を長さ L で割ったものは棒の直径に関係なく、風速のべ

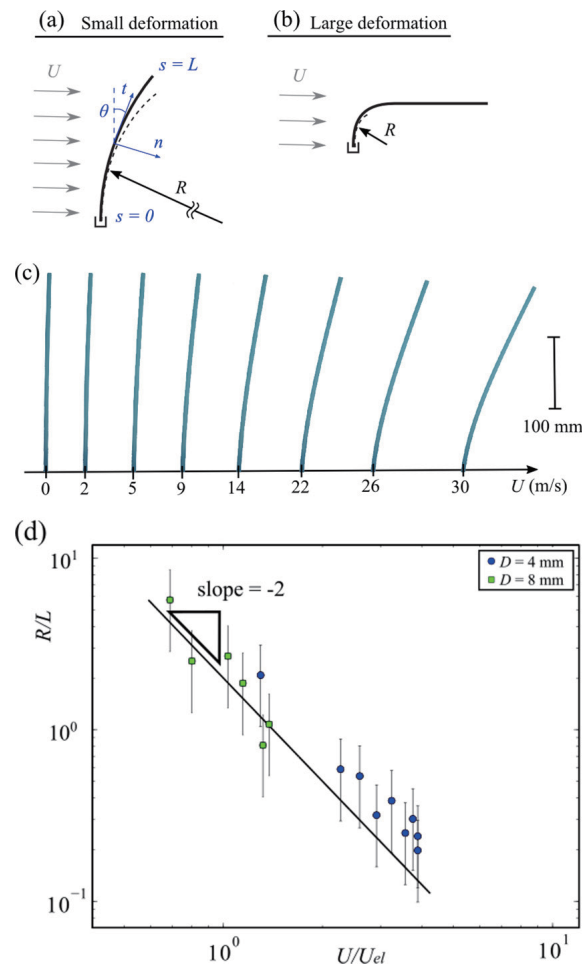


図 13: 棒の曲率半径 R -長さ L 比の風速 U 依存性.

キで減少します。このほか、この研究ではねじれの効果も検証しています。これらを総合し、樹木が折れる臨界風速は高さ、直径、弾性特性（堅さ）にほとんど関係しないと結論しています。

問 2

竹については古くから研究されてきています。特に、建築材料に用いられることもあり、建設・土木系の学会員による研究も多く見られます。第8回木橋技術に関するシンポジウムでは有尾一郎（広島大学）、中沢正利（東北大学）により、「竹節の形態組織構造から学ぶ軽量最適化構造の創造設計」という論文が発表されています。その論文では、竹の構造の利点を見出しそれを橋脚などの設計に応用する目的で、孟宗竹の生体構造の測定と力学的試験、理論的な線形座屈（力を加えることによる折れ曲がり）解析による構造解析を通して、組織構造の仕組みを示し、竹の構造が力学的に最適な構造であることを見出しています。

この論文では測定した竹を高さ方向を竹の長さ, 半径を最大半径で規格化して図示しています. 図 14

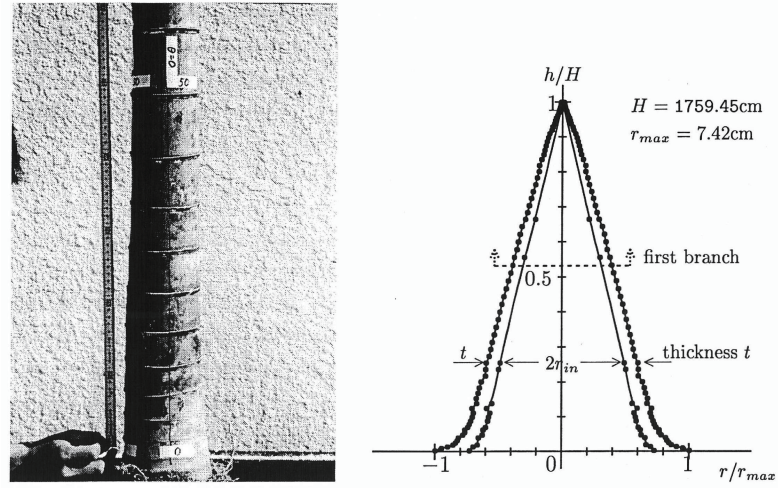


図 14: 孟宗竹の稈部形状. (a) 根元付近の節間隔. (b) 規格化した竹の形状

から, 以前から知られていることではありますが, 半径が高さに比例して減少すること, 厚さは半径に比例すると近似できることを見出しています. また, 図 15 のように, 断面内の繊維(維管束) 分布を 2 値化画像で表し, 繊維分布が斑点状に同心円状に分布しており, 表皮側が繊維の密度が高く, 内側が低くなっていることを見出しています.

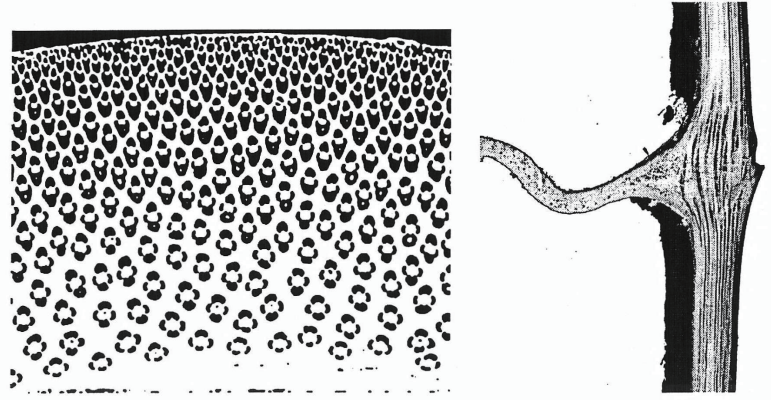


図 15: 孟宗竹の断面. (a) 維管束密度分布 (2 値化画像処理). (b) 節部の縦断面.

他方, 昨年, Physical Review E vol.93, 022406 (2016) に山梨大学, 北海道大学, 熊本県立大学の Hiroyuki Shima, Takeda, Kofu, Motohiro Sato, Akio Inoue による「Self-adaptive formation of uneven node spacings in wild bamboo」という論文が掲載されました. この論文では, 竹の形状, 節間隔の変化, 厚みの高さ変化, 曲げ弾性, 曲げ弾性に対する節の効果などを解析的に議論しています. この論文では, 高さ h における稈の半径 r は, H を竹の長さとして,

$$r \propto \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{0.871} \quad (4)$$

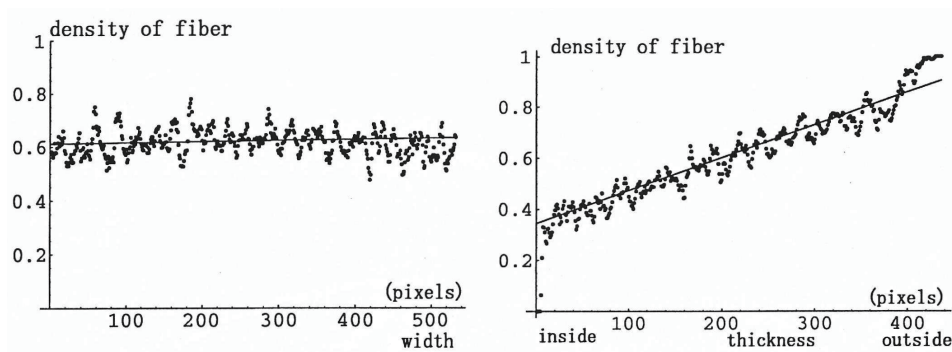


図 16: 維管束密度分布.(a) 周方向の維管束密度分布 (b) 厚さ (経) 方向の維管束密度分布

となることを見出しています。

また、節と節の間に下から番号 n を振り、総数 N で割ったもの $x \equiv n/N$ に対する (そうすることで、節の総数が異なるものでも比較できる), 相対高さ $h(x)/H$ および節間隔 $l(x)$ を求めている。図 17(b) のよ

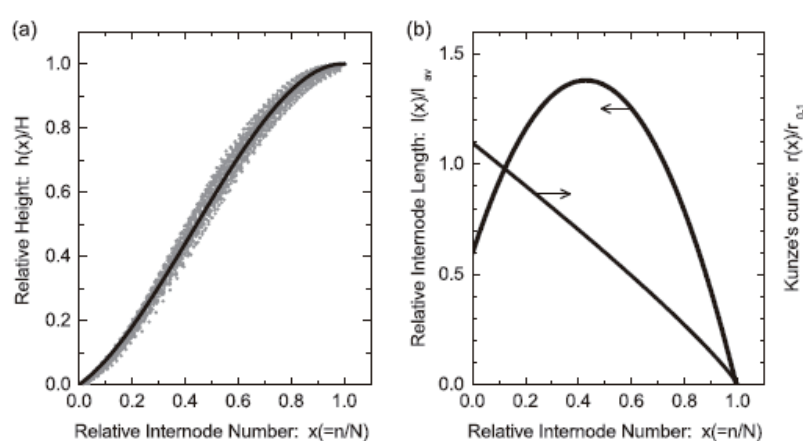


図 17: (a) 相対高さの相対節間番号依存性, (b) 節間隔の相対節間番号依存性.

うに節間隔は根元と先端部分で短くなっており, x に対して放物線状になります。

そのほか、力学的考察を踏まえ、竹の節の間隔はできるだけ軽く、かつ、できるだけ丈夫になるように最適化されていることを示しています。

講評

問 1 については、様々な種類の木の手を置いてあったので、それを用いて長さを変えて曲がり易さ、折れやすさを調べた解答が多くありました。しかし、それを科学に持って行くには定量性が必要で、手の種類、手の長さ、手にかける力 (おもりの重さ)、力がかかる場所 (先のみに負荷、全体に負荷) などをそれぞれ変えて、計画的に変形量 (ひずみ) を数値として測定しなければなりません。表を作成して計画的に実験できていた解答を高く評価しました。また、木材は乾燥しているが、実際の木材は生であるのでその影

響についての考察もいくつか見られました。

問2については、竹を段差に建て掛け、上に乗って弾性を楽しんでいる様子も見られました。また、大きな竹を悪戦苦闘しながら観察している様子が見られました。節の間隔が根元近くで狭くなっており、先に行くに従い、広がりながら次第に等間隔になるという記述をした解答がいくつか見られました。いいところに注目できていると思います。しかし、それを科学にするためには定量的な測定をしなければなりません。一番下の節から上の節までの距離や竹の周長を測定するなど、システムティックな測定をして欲しいものです。

更に、大きさが異なるものをどのように比較するかを考える必要があります。Myriam R. Hirt, Walter Jetz, Björn C. Rall and Ulrich Brose : A general scaling law reveals why the largest animals are not the fastest NATURE Ecology & Evolution, DOI: 10.1038/s41559-017-0241-4, 2017 では、陸上を移動する動物の最大移動速度はネズミから象まで質量に対して同じ法則に従っていることを発見しています。どのように比較するのか工夫するようにしてください。できるだけ定量的に考察しようとしたものを高く評価しました。

3 課題 3

SF において、宇宙における騎士道物語や、冒険活劇を取り上げるジャンルを「スペース・オペラ」という。テレビ・ドラマや映画の題材として取り上げられることが多い。有名な映画「スター・ウォーズ」シリーズや、「スター・トレック」シリーズは名監督が制作し全世界で公開され、興業的にも成功している。前者は神話に基づいた宇宙活劇であり、後者は科学に基づいた宇宙冒険ドラマである。ロボット工学の3原則(後に、より包括的な第零原則が追加される。)を生み出したことで、有名なアジモフのスペース・オペラ「銀河帝国興亡史」は、ギボンズの「ローマ帝国興亡史」に基づいて未来宇宙の架空の帝国史である。ハーバートの「砂の惑星」では、ゴシック小説的な幻想的中世世界観が展開されている。この小説は貴種流離譚(若い神や英雄が他郷をさまよいながら試練を克服した結果、尊い存在となるとする説話の一形態であり、例えば、ギリシャ古典叙事詩「オデュッセイア」もこの形式の物語である。)の典型であると共に「スター・ウォーズ」の世界観に影響を与えたともいわれている。また、テレビ・ドラマや映画に目を向けると、ほかの例もある。1960年代に制作された「スター・トレック」の最初のテレビ・ドラマシリーズは、ナポレオン時代の英国海軍士官を題材とした英国の国民的海洋冒険小説である「ホーンブローワー」シリーズの宇宙版として企画された。図18に示すように、17世紀から18世紀に活躍した武装商船は、船であると共に、海に浮かび、移動する(航行する)要塞でもある。

海洋冒険活劇を念頭に、遙か銀河の彼方の水の惑星「アクア」の上で繰り広げられる海戦をゲームとして設計することを考えてみよう。アクアの文明では、火薬は発明しているが、内燃機関はまだ発明されておらず、水上、海上の移動は自然エネルギーである風を利用した帆船を利用している。また、敵艦船が航行不能になったら、それ以上攻撃しないことが、人的被害を大きくしないために、惑星アクアの多国間で暗黙の了解となっている。そこで、敵帆船の帆やマストに砲火を集中させ敵戦艦を航行不能にする作戦がとられることになった。また、高速帆走船の帆の構造上の問題から、砲門は舷側に備え付けられている。

砲弾発射と着弾点予測を力学の問題として、敵戦艦のメインマストに着弾を集中させる問題を考えてみよう。

問1 各船団が、隊列を組み、互いに相対速度零で並列航行している場合に、どのように、着弾点を決めればよいか説明しなさい。

問2 さらに、威力を増すために、多数の同僚船から射出した多数の砲弾を、同時に同じ場所に着弾させる手法を構成しなさい。

多数の僚船から一艘の敵船に着弾を集中させる戦略として、丁字戦略が知られている。これは、敵船団の前を横切りながら、敵船団の先頭艦に砲火を集中させる戦略である。

問3 上の「問1」、「問2」と同じことを丁字戦略について考えなさい。

惑星アクアのある国が、図 19 に示すように、甲板の前方上に設置した大砲を回転させて発射方向稼働とする回転式砲塔の開発に成功した。回転式砲塔を利用すると、敵船の航行を予測できれば、その位置に砲弾を着弾させることが可能となる。砲塔の回転は人力や動物力で行うためその回転速度は限られている。そのため、出来るだけ正確に発射方向を決める必要がある。

問 4 敵戦艦の航路を予測する手法を考えなさい。何を観測し、何を決定すれば、運動する対象の動きを予測できるかを数理的に考えてください。



図 18: 平行帆走による海戦: 出典 <https://en.wikipedia.org/wiki/Galleon>



図 19: 回転式砲塔による攻撃: 出典 <http://guides.gamepressure.com/assassinscreediv/guide.asp?ID=22685>

解説

問 1

同じ火薬の量を使用すると仮定すれば、仰角が 45° の場合に、砲弾の飛距離が最大になる。一方、課題では、敵艦のマストを破損させるために、砲弾をマストに最大運動量で命中させることが理想的である。砲弾の軌道が、理想的な放物線をたどるとすれば、砲弾の水平方向の運動量が最大になるのは、放物線の頂点である。また、放物線軌跡の頂点、すなわち、砲弾の最高到達点までの距離は、砲弾の最大飛距離の半分の距離である。しかし、仰角を 45° にすると、砲弾の最高到達点が高くなる。そこで、標的とする敵艦を真横に見込むように航行速度を調整し、砲弾の最高到達点を、マストの甲板から適切な高さにし、そこが最大飛距離の半分になるように、大砲の仰角を調整することになる。

問 2

舷側にある砲台から発射される砲弾の方向は、船の進行方向と直交する。砲弾の飛行方向を変えて、敵艦体の 1 隻だけに着弾を集中させるためには船体自体の方向を調整するしか手段がない。種々の船団配置が考えられるが、敵船団が右手にあり、しかも着弾点が進行方向先方に想定される場合には、射撃に際して、船体の方向を船団の進行方向から左に向けることになる。

問 3

並列交戦の場合と同様に、丁字戦法の場合でも、船体の向きを操作して砲弾を敵艦隊先頭の船に集中させることになる。このとき、どちらの向きから敵艦隊前方を横切する場合でも、着弾、対象船と、自船団の前の艦を同じ側に見るように船体の舵を取ればよいことになる。

問 4

着弾時刻の敵対象艦の位置を予測し、砲台を回転させることになる。すなわち、過去の位置の観測地から、将来の位置を予測する方程式を考えることになる。

時系列 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{l-1}$ を観測し、この系列を生成する現象を推定することを考える。 x_l を $\{x_i\}_{i=-n+l}^l$ の関数として

$$x_l = f(x_{-n+l}, x_{-n+l+1}, \dots, x_{l-1}) + \varepsilon_i \quad (5)$$

表現することを考える。ここで、 ε_i は誤差である。特に $\{x_i\}_{i=-n+1}^{l-1}$ の線形和として

$$f(x_{-n+l}, x_{-n+l+1}, \dots, x_{l-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{-n+l+i} + \varepsilon_i \quad (6)$$

と表現される場合を線形予測と呼ぶ。

全ての l に対して $f(x_{-n+l}, x_{-n+l+1}, \dots, x_{l-1})$ が $\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{-n+l+i}$ によって十分に近似できるためには

$$J_j = \sum_{i=j}^{j+(n-1)} \varepsilon_j^2 \quad (7)$$

を小さくする係数を求めればよいことになる. x_i の変動がそれほど不規則でなければ (エルゴート性を満たせば), J_j の最小値を与える $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ は j に因らないことが知られている.

以下, 例として, x_l をそれ以前の 3 つの値の線形和で近似できると仮定できる場合

$$|x_i - (a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + a_3 x_{i-3})| < \varepsilon_i \quad (8)$$

を解析する. ε_i を i に関して j から $j + (k-1)$ までの平均を取って

$$J_j = \frac{1}{k-1} \sum_{i=j}^{j+k-1} \varepsilon_i^2 \quad (9)$$

を最小化することによって a_1, a_2, a_3 を求める.

J_j が j に因らないことを仮定しているので, 改めて

$$J = \frac{1}{k-1} \sum_{i=j}^{j+(k-1)} \varepsilon_i^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=3}^{k+2} |x_i - (a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + a_3 x_{i-3})|^2 \quad (10)$$

と置くことにする. さらに,

$$r_l^{(j)} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=j}^{j+(k-1)} x_i x_{i-l} \quad (11)$$

と置くことにする. 一般の次数と同様, x_i の変動がそれほど不規則でなければ (エルゴート性を満たせば), 全ての $r_l^{(j)}$ は j に関わらず一定値 r_l として取り扱うことができる. すると, J は

$$J = r_0 - 2(r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3) + (r_0 a_1 + r_1 a_2 + r_2 a_3)^2 \quad (12)$$

となる. J の最小値は

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_1} &= -2r_1 + 2r_0 a_1 + 2r_1 a_2 + 2r_2 a_3 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} &= -2r_2 + 2r_1 a_1 + 2r_0 a_2 + 2r_1 a_3 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_3} = -2r_3 + 2r_2 a_1 + 2r_1 a_2 + 2r_0 a_3 = 0 \quad (14)$$

の解である. 従って, 連立方程式

$$\begin{aligned} r_0 a_1 + r_1 a_2 + r_2 a_3 &= r_1 \\ r_1 a_1 + r_0 a_2 + r_1 a_3 &= r_2 \\ r_2 a_1 + r_1 a_2 + r_0 a_3 &= r_3 \end{aligned} \quad (15)$$

を解けば, $a_1 a_2 a_3$ が得られる. 式 (15) の解を $a_1^* a_2^* a_3^*$ とすれば,

$$x_k = a_1^* x_{k-1} + a_2^* x_{k-2} + a_3^* x_{k-3} \quad (16)$$

によって, 観測値 $x_{k-1} x_{k-2} x_{k-3}$ から次の値 x_k を予測できる.

船の動きのような 2 次元の軌跡, 航空機の飛行経路のような 3 次元の軌跡を予測するためには, 上記のモデルをベクトルに拡張した形式を利用する. 例えば, 3 次元の場合には, そして,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (17)$$

を, 3 次元空間内の位置を表すベクトルとする. このとき,

$$r_l^{(j)} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=j}^{j+(k-1)} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_{i-l} \quad (18)$$

として, 方程式 (15) を解くことになる. ただし,

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

に対して

$$\boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{\beta} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \quad (20)$$

である.

また, 予測式は

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = a_1^* \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \\ z_{k-1} \end{pmatrix} + a_2^* \begin{pmatrix} x_{k-2} \\ y_{k-2} \\ z_{k-2} \end{pmatrix} + a_3^* \begin{pmatrix} x_{k-3} \\ y_{k-3} \\ z_{k-3} \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる.

飛行経路の予測は, 第二次世界大戦に, 高射砲による爆撃機への攻撃のために研究された. ここでは, レーダによる位置計測を高射砲に伝える通信とそれに基づいた高射砲の砲弾発射方向に制御の間の密接な関係が議論された. 渡り鳥の群れがその向かう方向を急には変えられないことから, 線形予測の妥当性が説明される. また,

クレー射撃の射撃手は, 目から入った標的の飛行方向を予測し, 予測する方向に向けて, 散弾を発射するために引き金を引く指令が脳から指先に出す.

ことは容易に理解できる. 視覚による標的の飛行方向の認識, 軌道の予測, 引き金を引く判断, に伴う視覚情報に基づく脳から指先への情報の伝達が一体となって行われているはずである. このような行動のモデル化は, 大戦後, ノバート・ウィナーによってサイバネティクスと呼ばれるようになり, その考えは脳の働きを数理的に解明する研究へと発展していった. また, 同時代に今の人工神経回路網の基礎も発表されている.

講評

帆船を話題としたことから, 16 世紀を想定して考えていたようである. 19 世紀の末まで, 外洋船は, 帆走と, 機関の併用であった. 20 世紀への世紀の変わり目から, 機関に置き換わって行, 1930 年代には自動給炭が現れ, その後, 重油エンジンへと移り変わってきた. 動力変換方式も, 外燃機関, 内燃機関, タービンへと効率化を求めてきた.

一方, 帆走は, 船型, 操船法も含めて今も進化をしている. アメリカンズ・カップに利用されるヨットは, 帆がブレードあるいはウイングと呼ばれる固定翼に変わり, 追い風以外の場合には, 翼の揚力と同様の空気力学的性質を利用して帆走している. そのため, 通常の帆走に比べても, 風上に向かって航行できる角度が小さくなっている. さらに, 水中翼の利用によって 80km/h 程度で航行可能になってきている. また, 種々のセンサーを装備しており, 練習航行で計測される大量のデータからレース時の航行方法を設計することが行われる.

問 1 は高等学校物理の課題である. 一方, 問 1 が解けると, 問 2, 問 3 は平面幾何学の問題となる. 高等学校物理の力学の課題の一部は, 古くから砲術の一部の弾道学として教えられて来た. 火薬を使った大砲が発明される以前から, 投石機の利用法としても使われてきた. 古代ローマ軍は城壁攻撃用に投石機を使用しており, また, 軍艦に投石機を搭載していた. この頃の海戦は, 海上を移動する要塞 (軍艦) に対する船上陸軍 (海兵) の戦いであった.

補遺

関数 $f(x)$ の定義区間 $[a, b]$ の任意の異なる要素を x_1, x_2 とする. $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $f(x)$ が

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (22)$$

を満たすとき, $f(x)$ は凸関数と呼ばれる. 例えば, 2 次関数は凸である. 凸関数は

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 \quad (23)$$

を満たす点 x^* に於いて最小値を取る.

3 変数の関数 $f(x, y, z)$ に対して, 式 (22) は

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq \lambda f(x_1, y_1, z_1) + (1 - \lambda)f(x_2, y_2, z_2) \quad (24)$$

となる. このとき, $f(x, y, z)$ の変数ごとの微分に対して

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z) = 0 \quad (25)$$

を満たす (x^*, y^*, z^*) が f の最小値を与える.

4 課題 4

課題

人間が、物事を推理する処方は、大きく分けて、帰納と演繹とに分類される。演繹とは、

「多数の仮説、一般的事実、経験から、処理し、特殊な結論を導き出す方法論である。」

一方、帰納とは、

「個別的・特殊的な事例から一般的・普遍的な規則・法則を見出そうとする方法論。」

のことである。

人工知能とは、

「人間の知性を機械の上に実現した装置、あるいは機構である。」

このような、人工知能を、強い人工知能と呼ぶことがある。一方、

「人間の認識機能や感覚機能を模倣する機構。」

を弱い人工知能と呼ぶことがある。

現在の弱い人工知能は、計算機(コンピュータ)の上に、アルゴリズムを実行するプログラムによって実現されることがほとんどである。弱い人工知能だけを、人工知能、あるいは、実用的な人工知能と呼ぶこともある。高度であるが、弱い人工知能の例として、チェス、将棋、碁を指すコンピュータ、多数の薬効例から、ある病気の治療薬を探すシステムなどがあげられる。これらは実際に大規模な高速計算機によって実現されている。このようなシステムを実現するアルゴリズムの数学的基礎は探索と最適化である。

現在、弱い人工知能が種々の分野において実現され、実際の問題に適用されている。弱い人工知能の成功は、問題の解析と、その数学的記述法の開発、高速計算機の進歩、これらの問題に現れる数学的手法に対する解法理論の進歩によっている。どれが欠けても今日のシステムは存在しない。人工知能について以下の問を考えてください。

問 1 弱い人工知能では解決不可能な課題は何か論じなさい。

問 2 強い人工知能を実現することは可能かどうかを考えなさい。不可能であれば何が問題で実現できないのか、可能であれば、どうして可能と考えるかを述べなさい。

解説

人工知能とは、「人間の知能を、計算機の上で実現する。」ことを目的とする思想である。科学技術の中の思想であるから、それを実現する方法論、方法論を支える理論・技法・技術へと、順に下位レベルに分解されことになる。計算機による知能の実現を目指すことから、人工知能の研究は情報科学(計算機科学)、情報工学の守備範囲である。人工知能の定義から、機械的身体(機体)を持った人工知能として、SF小説に現れるロボットも定義の延長線上にある。知能の定義によっては、完全自律走行車でも、ロボットではなく、単なる自動機械にしかすぎないことになる。

人工知能を構築する手法はいくつかある。代表的な手法は、論理プログラミングに基づく手法と、現在はやっている人工神経回路網や統計的機械学習に基づく手法である。前者は、1980年代から1990年代に掛けて研究が進み、エキスパート・システムとして利用されている。例えば、有機化学分野では、新たに合成した物質の構造決定や新規性判断に利用されている。また、交通違反の懲罰決定への応用も考えられている。

どちらの手法にしても、現在ある計算機の上にそのシステムが実装されている。従って、現在の計算機が実現できないことは、現在の人工知能の考え方、取り組み方では実現できないことになってしまう。そこで、現在の計算機の処理の限界について説明する。

現在主流の計算機は、フォン・ノイマン型と呼ばれる形式をとっている。この形式の計算機の、抽象的な計算モデルとしてチューリング機械がある。従って、現在の人工知能は、今のところチューリング機械の能力を超えないことになる。

さて、画像理解(ロボットや装置が、撮像した画像の中の特徴を捉えて、それ以降の行動の判断に利用する情報を抽出・獲得する処理の数理・情報モデルを研究する分野)に於いて現在注目を集めている手法の1つがコンボリユーション・ネットワークである。これは、視神経から入った入力が大脳視覚野において処理される過程に基づいて構築された情報処理機能である。この機能を利用した装置は入力から出力に至る変換に含まれる多数の媒介変数(パラメータ)を、多数の例題から計算(学習)する装置である。うまく動作をするが、以下の様な問題は、現在でも解決されていない。

- この装置は確率的な手法によって学習を行う。そのため、同じ例題を使った場合でも、すでに学習した装置をリセットして学習を行って、似た入出力関係を構築できる。しかし、同じパラメータが計算されているかの保証はない。
- 学習によって獲得される入出力関係は、変換を記述する人工神経回路の構成を停留化しているだけであって、一般には最適性の保証がない。しかも、入出力関係を記述する変換の情報科学的意味が現在のところ明確ではない。また、明確にするための数理的手法そのものが発展途上である。
- 学習のためには、妥当な例題を多数用意しなければならない。また、対象によって妥当な例題の定義が異なる。現在でも、妥当な例題の構成法に関して研究が続いている。
- ある課題に対して成功した人工神経回路網の構成が、他の課題に対しても有効なのかを判断する方法論がない。

大戦中、大戦後のサイバネティクスに続いて、1950年代後半から1960年代には「推論・探索」が、1980年代は「知識表現」の研究が注目された。2000年代に入り、画像認識での性能の高さから「深層学習」とその基礎となる「機械学習」に脚光が当たっている。

現在よく耳にする「深層学習」の後に文字の「学習」の情報科学の学術用語としての意味は、「入力と出力との対応関係の例から、対応関係を推定する手法」の総称に過ぎない。さらに正確には、「深層」には、その逆「浅層 (Shallow)」がある。深層や浅層は、人工的に脳の処理機構をまねた層状の情報処理機構の層の数を分類しているに過ぎない。最近の研究で取り上げられる装置は4層以上のものである。数理的に脳の神経回路網をモデル化した装置を人工神経回路網という。層型ではない、相互接続型も存在する。

人間の行動を、入力 (刺激) と出力 (反応) との関係として捉える考えは、デカルトまでさかのぼる。条件反射を説明する「パブロフの犬」も、ベルの音と餌との関係を学習したことになる。人工神経回路網による情報処理機能の解明は、1943年のマクロッチとピッツの成果に始まる。その後、20世紀の60年代に活発に研究されてきた。しかし、画像を読み込む領域が有限の場合、3層構造では「画像の穴」を認識できないことが証明され、急速に研究者の数が減っていった。しかし、甘利、福島、ルーメルハートらは、独自に研究を深化させ、多層構造を用いれば、3層では解けない問題を解決可能なことが、80年代には解明されていた。

我国では70年代、旧通商産業省の電子技術総合研究所を中心に、「パターン情報処理プロジェクト」として、画像や音声の認識装置の研究・開発が行われた。実時間画像処理装置の応用として、側線検知による車両操舵支援も研究されていた。80年代には、「第五世代計算機」として並列計算と、数理論理学に従って推論を行う装置開発の国家プロジェクトが実施され、専門家の知識を集積し、質問者を補助するエキスパートシステムが開発された。しかし、当初の期待が大きかった分、成果に対する批判的見解も多かった。次いで、90年代には「リアルワールドコンピューティング」プロジェクトの一環として現在の人工知能研究で取り扱われる統計的な手法を利用した人工知能研究がすでに行われてきた。

大型プロジェクトや世界の動向とは独立に、人工知能や機械学習の研究に情熱を傾け、情報科学的に興味深い成果を上げた研究者もいたことも重要である。しかも、これらの地道な人工知能に関する研究成果は統計物理学や認知心理学などの関連分野とも密接に関連しながら深化し、精密科学としての一分野を築いて来たのである。

講評

どのような方式を取ったとしても、現在の人工知能では、入力から出力への単射を構成している、Web検索のように、順序付された複数の候補を出力するように設計はできるが、1つの入力に対して複数の出力 (答) が同時に導出されることはない。すなわち、文章の行間を読み解き、文学作品を鑑賞する文芸的能力はない。また、芸術的絵画の中にある幾何構造を抽出することは出来ても、絵画を美学的に鑑賞し、評論することはできない。ただし、標準的な例題を学習させておけば、標準的な評論をデータベースの中から探し出すことは可能である。すなわち、多数の例題から模範的な知見や回答を得ることはできるが、独創的な発想を導くことは期待できない。

同じことを経験しても、独創的な思想や知見を導き出すのは、人類だけに可能な営みである。

課題 4 の文献

- 1 ルネ・デカルト (落合太郎 訳):方法序説 岩波文庫, 1967(原著 1637).
- 2 Warren McCulloch, Walter Pitts:A Logical calculus of ideas immanent in nervous activity, Bulletin of Mathematical Biophysics, 5, 115-133, 1943.
- 3 イワン・パヴロフ著『大脳半球の働きについて』岩波文庫, 1975(原著 1926).
- 4 マービン・ミンスキー, シーモア・パパート (斎藤正男訳):パーセプトロン-パターン認識理論への道, 東京大学出版会, 1971(マービン・ミンスキー, シーモア・パパート (中野馨, 阪口豊訳):パーセプトロン 改訂版, パーソナルメディア 1993).
- 5 J.S. グリフィス, (塚原仲晃, 佐藤俊輔 訳), 数理神経生物学, 産業図書, 1973.
- 6 デーヴィッド・ルーメルハート (御領 謙訳):人間の情報処理—新しい認知心理学へのいざない, サイエンス社, 1979 (原著 1977).
- 7 甘利俊一:神経回路網の数理—脳の情報処理様式, 産業図書, 1978.
- 8 福島邦彦, 神経回路と情報処理, 朝倉書店, 1989.
- 9 福島邦彦:位置ずれに影響されないパターン認識機構の神経回路のモデル—ネオコグニトロン—, 電子通信学会論文誌 A, vol. J62-A, no. 10, pp. 658-665, 1979.

ロボットの部

5 ロボットの部課題

1 階の自習室に, RAPIRO が用意してあります. 各自でロボットの動作課題を考え, その動作を実現しなさい. どのような動作課題を考えたかレポートを作成してください. 動作の独創性, 面白さを評価します. 動作実演は 7 月 16 日の午後 3 時に始めます. それまでに, 動作プログラムを完成させてください.

講評

命令の数, 動作の連続性, 動作の正確性を基準とし, 主催者, 補助者の祭典, 参加者の相互採点の合計点の, 上位参加者を機巧賞としました.