

第22回数理科学コンクール課題

1. 課題の部は4つの課題を用意しました。いくつかの課題に解答してもかまいません。また、1つの課題にいくつ解答してもかまいません。例えば、実験をして見つけた解答と、実験をせずに考えた解答との2つの解答を提出してもかまいません。むしろ2種類以上の解答を歓迎します。その場合にはどうして答えが2つ以上になったかも説明してください。
2. グループで参加した諸君は、1つの課題に1つの解答でも、また、複数の解答でもかまいません。たとえば、協力して解答を考えたけれども、途中から別々の結論を思いついた場合には、それぞれの参加者が別々に解答してもかまいません。その場合、1つの解答を一緒に提出する参加者の名前を、解答用紙に記入してください。たとえば、Aさん、Bさん、Cさん3人のグループで、AさんとBさんが1つの解答を、Cさんが1人で、別の解答を用意した場合には、Aさん、Bさんが用意した解答用紙には、グループ番号、AさんBさん2人の名前と参加番号を、もう1つのCさんの解答用紙にはグループ番号、Cさんだけの名前と参加者番号を記入してください。
3. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません。ただし、異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください。また、1つの課題に1つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください。1つの課題に2つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください。
4. 課題に関する質問は監督者に質問してください。どんな質問でもどしどし質問してください。
5. 2階のG-23講義室と2階のフロアーには解答を考えるための実験用の道具、教材、機器が用意してあります。何を使っても構いません。工具の利用法は監督者に相談してください。
6. ロボットの部は、第1日目にロボットの動作に関するプログラムの講習を受けてください。第2日目(課題の部実施日)にプログラムを作成し、第2日目の午後3時以降に動作評価のためのコンテストを実施します。

課題の部

課題 1

日本人は古来より花鳥風月、日本の風土、四季の織りなす自然現象に風情を感じ、愛でてきました。私達は、梵鐘や風鈴、北風の音、滝や潺（せせらぎ）の音、花火の音など音からも風情を感じ、感傷に浸ることもあります。音の風情を楽しむために、庭に滝や小川を作ったり、水をはったドーム状の陶器の器に水滴を落とし、水が水面に落ちるときに発生する音の反響を楽しむ水琴窟なるものまで開発しています。

さて、水面に水滴が落ちれば音がします。この日常的に当たり前な自然現象ですが、何故音が発生するのか、水滴がどのようなようになった時に音が発生するのか考えてください。

スポイトと透明なコップを用意しました。実験をしながら考えてみてください。

課題 2

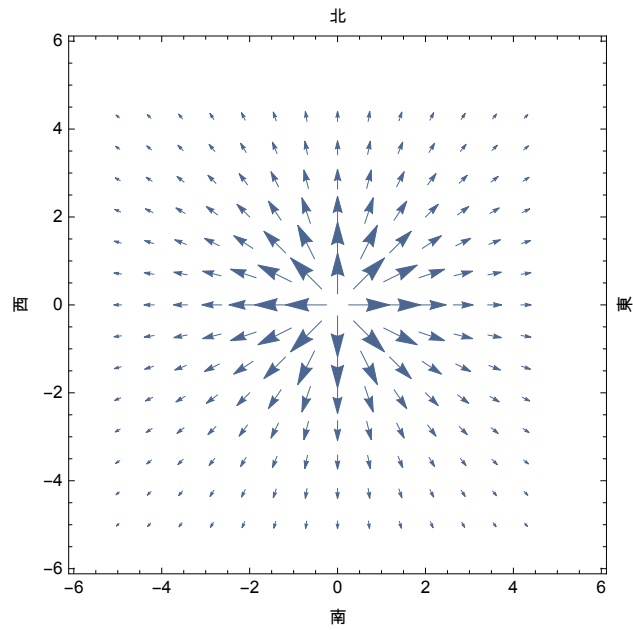
液体や気体は圧力差があると圧力を均等にするように流れが生じます。水道や風、建設工事での生コンクリートもこの法則に従っています。

テレビなどで毎日、天気予報が放送されていますが、その時、風速、風向、気圧などを解説することがあります。しかし、実は、風速、風向は気圧で決定されるので、どちらか一方が分かればもう一方の情報は物理的に計算することができます。(とはいえ、測定しておくに越したことはありません。)これは、電磁気学において、各点の電位が決まれば、色々な場所での電場が決まり、逆に、様々な点の電場が決まれば、各点での電位が決定されることと数学的には全く同じです。

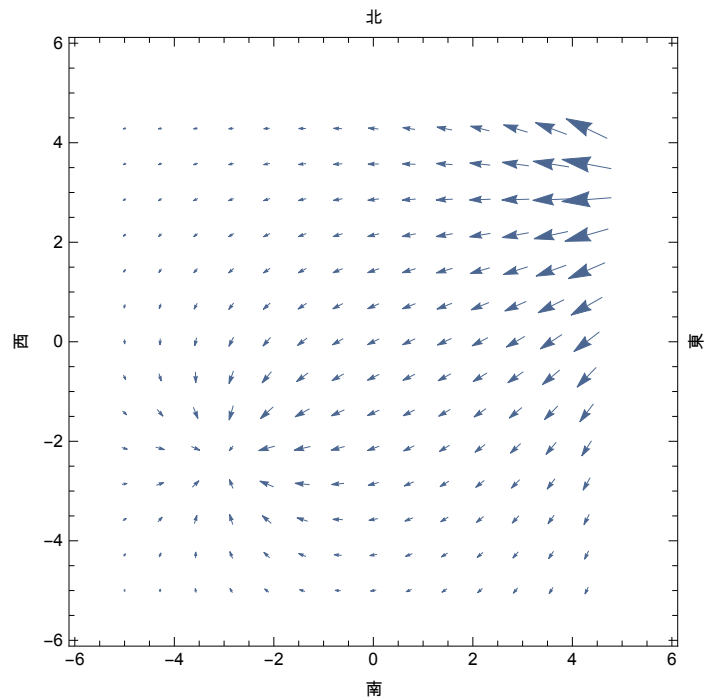
さて、ここでは、気象について考えてみましょう。地表面の風速、風向のデータから、気圧の情報なしに、どのような気象状況なのか(どこに低気圧、高気圧があるのか)を考えます。

問題を簡単にするために、地表面の気温は一定で空気の密度は一定であるとして以下の問題を考えてください。

問 1 地表面に以下の図のような風が吹いているとき、どのような気象状況でしょうか？なぜそのように考えたのか、考え方、できれば数値指標を用いて説明してください。



問 2 地表面に以下の図のような風が吹いているとき、どのような気象状況でしょうか？なぜそのように考えたのか、考え方、できれば数値指標を用いて説明してください。



問 3 気象庁予報部は漁業用に気象通報をラジオ放送しています。表 1, 6 月 25 日正午の気象通報から風向, 風速を抜き出したものです。このデータを天気図に地上天気図に記入し, どのような気圧配置であったのか説明してください。ここで, 風力とは気象庁風力階級表による風速の尺度で, 表 2 のように定義されています。

表 1: 気象庁予報部発表 2019 年 6 月 25 日正午の漁業気象通報放送原稿

場所	風向	風力	場所	風向	風力
石垣島	東北東	3	浦河	西	3
那覇	南東	4	根室	南南東	3
南大東島	南東	3	稚内	南西	4
名瀬	南東	4	ポロナイスク	南	4
鹿児島	南南東	2	セベロクリリスク	東北東	2
福江	東	2	ハバロフスク	西南西	4
巖原	北東	2	ルドナヤプリスタニ	東	2
足摺岬	東	3	ウラジオストク	南	5
室戸岬	東北東	3	ソウル	南南西	2
松山	西南西	2	ウルルン島	東南東	2
浜田	北	2	プサン	東南東	3
西郷	東	2	モッポ	北西	3
大阪	北北東	2	チェジュ島	東南東	3
潮岬	東南東	3	恒春	東	1
八丈島	南南西	2	長春	南西	2
大島	西南西	2	北京	東北東	2
御前崎	東南東	2	大連	南	3
銚子	東北東	3	青島	南南東	2
前橋	南南東	2	上海	南東	3
小名浜	南	3	武漢	東	2
輪島	北北西	4	アモイ	北北西	1
相川	南南西	3	香港	風向不明	1
仙台	南東	2	バスコ	北西	3
宮古	北東	2	マニラ	西南西	2
秋田	西南西	3	父島	南	3
函館	南西	2	南鳥島	東南東	4

表 2: 気象庁風力階級表

風力	相当風速 (m/s)
0	0.0 から 0.3 未満
1	0.3 以上 1.6 未満
2	1.6 以上 3.4 未満
3	3.4 以上 5.5 未満
4	5.5 以上 8.0 未満
5	8.0 以上 10.8 未満
6	10.8 以上 13.9 未満
7	13.9 以上 17.2 未満
8	17.2 以上 20.8 未満
9	20.8 以上 24.5 未満
10	24.5 以上 28.5 未満
11	28.5 以上 32.7 未満
12	32.7 以上

課題 3

イベリア半島に進出したイスラム教徒たちは、ウマイヤ朝を築き、その後、15世紀にグラナダ王国がキリスト教徒に滅ぼされるまで、現在のスペインを支配していた。今でも、スペインにはイスラム教の面影が残る文化や遺跡が存在する。グラナダ王国の首都であったグラナダにあるアルハンブラ宮殿は世界遺産の一部である。この宮殿は、イスラム教時代の城郭に遡り、夏季にグラナダで一番涼しい稜線に造られたといわれている。カトリックによるリコンキスタ以降、アルハンブラ宮殿には、キリスト教文明による手が加えられ、モスクが修道院に改築されたりした。しかし、幾つかの重要な部分は、イスラム教支配時代からそのままにされている。特に、後背地の山から水を引き込んだ噴水、水路の設計は、庭を潤すだけでなく、水冷によって宮殿を涼しくしている。この仕掛けは、セビリアの王宮に受け継がれている。イスラム教社会の水利、水工学の技術の水準は、同時代の近隣文化圏のそれに比べて非常に高いものであり、世界遺産の中には、当時の技術が今なお利用されているものが多数存在する。

アルハンブラ宮殿の有名な仕掛けの1つにライオンの中庭がある。ライオンの中庭の中心12頭のライオンが円形水盤を支え、口から水を出す噴水がある。現在は12頭のライオンの口から水が絶えず流れ出ている。しかし、このライオンの噴水は、且つては、1時間ごとに、1頭のライオンが順に口から水を出す水時計であったといわれている。一説では、征服したキリスト教徒が、仕掛けを調べるために分解したが、元に戻せなくなり、現在に至っているとも伝えられている。

そこで、12頭のライオンの口から順に水を出す、水時計の機構を、思考実験によって、推定・復元しなさい。ただし、弁や水車等の制御機構は、摩擦なく理想的な動作をすると仮定する。また、水は絶えず、上流から無限に、しかも連続的に供給され、使用された水は自然に返す、すなわち、下流に流すものとする。

課題 4

零以上の非負整数の集合 \mathbf{Z}_+ に対する計算論を構成しよう. \mathbf{Z}_+ の要素 x に対して

$$s(x) = x + 1$$

とする. この定義より,

$$s(0) = 1, s(s(0)) = 2, s(s(s(0))) = 3, \dots$$

であるから, 0 に s を n 回作用させたものが整数 n となる.

この関数 s を利用して, 整数に対する演算をアルゴリズムとして構成することを考える. そのために 2 つの非負整数 a, b が等しいときに 1 を出力する関数 $E(a, b)$ を利用する. 関数 $E(a, b)$ を利用すると m に n を加えるアルゴリズムは

1. m, n を入力とする. i に 0 を代入する
2. $s(m), s(i)$ を計算する
3. $E(n, s(i)) = 1$ ならば終了
4. m に $s(m)$ を, i に $s(i)$ を代入し, 2 に戻る.

である.

問 1 関係

$$m \times n = m + m + \dots + m$$

を考慮して, 加算演算を利用して, 2 つの非負整数の乗算を計算するアルゴリズムを加算のアルゴリズムを使うことによって作成しなさい.

問 2

$m > n$ ならば $m - n$ そうでなければ 0 を出力する演算を $m \ominus n$ とする. $m \ominus n$ を出力するアルゴリズムを作成しなさい.

問 3

$m > n$ ならば

$$m = qn + r, 0 \leq r < n$$

の q を, そうでなければ 0 を出力するアルゴリズム m/n を作成しなさい.

問 4

m^n を計算するアルゴリズムを作成しなさい.

問 5

k, l 整数を非負整数とする

$$m = kn^l, 1 \leq k \leq n - 1$$

となるとき $l = L_n m$ とする. l を計算するアルゴリズムを除算のアルゴリズム m/n を利用して作成しなさい.

ロボットの部

課題

1階の自習室に、RAPIROが用意してある。各自でロボットの動作課題を考え、その動作を実現しなさい。どのような動作課題を考えたかレポートを作成してください。動作の独創性、面白さを評価します。動作実演は7月28日の午後3時に始める。それまでに、動作プログラムを完成させてください。