

# 第6回数理科学コンクール課題解説

平成15年11月3日 千葉大学先進科学教育センター

## 目次

はじめに	2
優秀者氏名	4
<b>1 課題 1</b>	<b>5</b>
課題	5
解説	5
講評	5
<b>2 課題 2</b>	<b>6</b>
課題	6
解説	6
講評	7
<b>3 課題 3</b>	<b>8</b>
課題	8
解説	8
講評	8
<b>4 課題 4</b>	<b>10</b>
課題	10
解説	10
講評	11

## はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個人的な人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第5回数理科学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

### 1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

### 2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

### 3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

### 4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講習会を行う。

過去5回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第6回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

国立情報学研究所, 千葉大学教授 井宮 淳

千葉大学助教授 植田 毅

(五十音順)

平成15年11月3日

## 優秀者氏名

平成 15 年 8 月 9 日に開催しました第 4 回数理学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

### 第 6 回数理学コンクール優秀者

- 金櫛賞 グループ 17 太田奈緒香, 太田真由香  
長耕太郎  
杉浦 祥
- 銀櫛賞 グループ 1 安岡佑也, 谷川洸成, 鶴岡歴人, 奥出和広, 杉山正悟  
グループ 3 加藤茉奈, 山本香, 坂口順  
グループ 9 柏木亮太, 渡邊創士, 明野仁朗  
グループ 13 寺西智信, 加島佑一
- 学長賞 北奈苗

課題	参加者名
1	北奈苗 長耕太郎 グループ 1 安岡佑也, 谷川洸成 グループ 9 柏木亮太, 渡邊創士, 明野仁朗 グループ 13 寺西智信, 加島佑一
2	北奈苗 長耕太郎
3	北奈苗 杉浦 祥 グループ 17 太田奈緒香, 太田真由香
4	杉浦 祥 グループ 17 太田奈緒香, 太田真由香 グループ 1 鶴岡歴人, 奥出和広, 杉山正悟 グループ 3 加藤茉奈, 山本香, 坂口順

千葉大学先進科学教育センター長

教授 上野信雄

平成 15 年 11 月 3 日

# 1 課題 1

## 課題

電子計算機（コンピュータ）の基本素子は以下の3通りのものです。

- **AND ゲート**：2つの入力口と1つの出力口とを持ち、2つの入力口に共に入力された場合に出力を出す。
- **OR ゲート**：2つの入力口と1つの出力口とを持ち、2つの入力口のどちらか一方、あるいは両方の入力口に入力された場合に出力を出す。
- **NOT ゲート**：1つの入力口と1つの出力口とを持ち、入力がない場合に出力を出し、入力がある場合に出力しない。

また、NOT ゲート3つと AND ゲート1つで、OR ゲートを実現できることが知られています。

したがって、電気以外で AND ゲートと NOT ゲートとの働き模倣する装置を実現できれば、電気以外で動く計算機が実現できます。そこで、AND ゲート と NOT ゲート とを身近な物で実現する方法を考えてください。

## 解説

この課題には当然多数の解答があります。そして、正解がただ一つに決まるわけではありません。しかし、このような装置は身の回りにいくつもあります。しかし、出題者が意図したことはあります。現在、各国で量子計算機の開発競争が繰り広げられています。量子計算機概念は突然この世に現れたものではありません。計算の力学モデルや物理モデルを考える過程で理論的に構成されました。80年代には可逆計算という概念が提案され、その物理モデルとして、ビリヤードの衝突で論理演算を表現することが提案されました。出題者はこのビリヤードモデルを念頭にこの課題を考えました。

## 講評

いろいろな模型、水を使ったもの、空気を使ったものがありました。AND ゲートに限れば、トランペットのシリンダーのようなものを二つ組み合わせればよいことになります。しかし、NOT のなると、弁を閉じたときに流れ出る流体を注入する口が必要となります。このことから、論理演算には外から何かを注入しないと実行できないことがわかります。

## 2 課題 2

### 課題

電気の流れと水の流れは似た性質を持っています。水を使って電気回路の性質を調べることができます。電気回路の抵抗は、水路の太さを変えて、ある場所を流れる単位時間の水量を変えることに相当します。電気回路で抵抗を使わずに、抵抗を実現する方法を考えてください。これは、水の流れに例えれば、水路の太さを変えたり、蛇口の流量を変えたりすることを行わずに流量を調節することになります。ただし、放水栓を全開したり閉鎖したりすることは許すことにします。

実験に関して床に水をこぼさないようにしてください。

### 解説

この課題の背景は、スイッチとコンデンサーとで抵抗と同じ働きをする装置を構成できることに由来している。この装置はスイッチトキャパシタ (Switched Capacitor) と呼ばれます。その原理は電磁気学理論の創始者 J. C. Maxell までさかのぼります。簡単な装置は開閉を繰り返すスイッチ (開閉器) 2つとコンデンサー (蓄電器) とで構成されます。回路の構成には図 1, 2 の二種類があります。原理は、一つ目のスイッチ  $S_1$  を入れて蓄電器に電気 (電荷) を蓄積します。最初は電荷が移動して電気が流れますが、コンデンサーは電気を通さないで電気が流れなくなりコンデンサーに電荷が容量一杯蓄積されます。このときを定常状態に達したといいます。次に、一つ目のスイッチ  $S_1$  を切ります。このとき、コンデンサーには電荷がたまっています。そして、二つ目のスイッチ  $S_2$  を入れると、電荷がコンデンサーから放電されて電気が流れます。このことを繰り返すと、電源からコンデンサーの反対側に電荷が移動し、抵抗と同様の働きをします。スイッチの開閉周期を  $T$ 、コンデンサーの容量を  $C_R$  とすると、この装置の等価的な抵抗  $R$  は、 $T/C_R$  となります。当然、水門と溜池とで、この装置と同様の働きを説明できます。この課題は、大学入試の問題としても有名で、いろいろな変形があります。このように大学入試の問題にも由緒正しい現象に基づくものが多数あります。

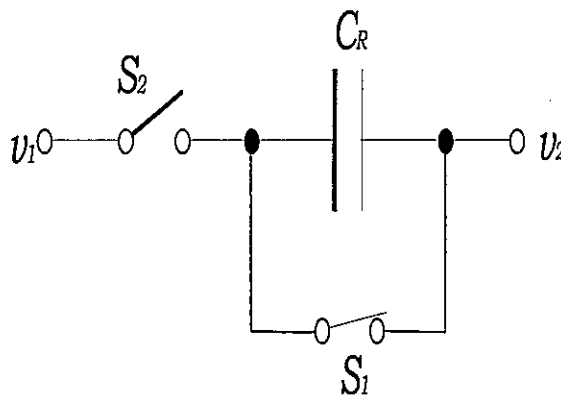


図 1: 直列型回路

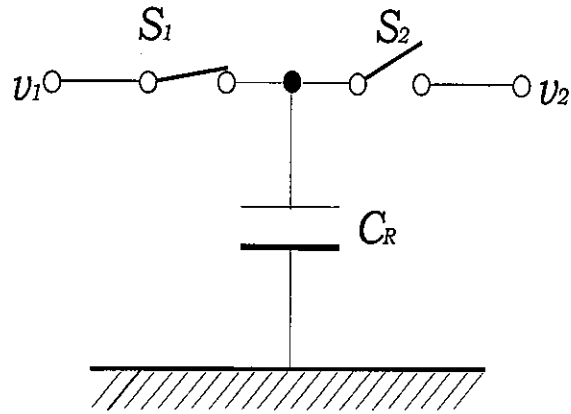


図 2: 並列型回路

### 講評

学長賞の北さんの解答には問題の本質を捕らえた図がかかれていました。非常に評価できます。他には、管の太さを絞るものがありました。これはまさに、電子の流れに対する抵抗です。



### 3 課題3

#### 課題

同じ温度、同じ体積のジュース（要するに、濃い砂糖水）とウイスキー（要するに、40wt% 程度のエタノール水溶液）を同じ形のコップに注ぐ。その中に、同じ温度、同じ質量の氷を入れるとき、

1. どちらの氷が速く溶けるか。
2. 何故そうなるか。

を考えてください。

実験用の試料、器具をそろえてあります。実験しながら考えてください。ただし、「エタノール水溶液」は絶対に飲まないこと。実験用の氷も口に入れないこと。

#### 解説

この問題は基本的には中学2年生くらいの理科で習う、海風、陸風、もしくは高気圧低気圧の話と同じである。つまり、空気は暖かい地表（海も含む）で暖められると膨張し、密度が低くなるので軽くなり、上昇する。これが低気圧である。逆に、地表が冷えていると空気も冷やされ、密度が上がり、空気は降下する。これが高気圧である。

これを頭においてこの実験を考えてみると、アルコール（ウイスキー）の密度は水より小さいが、砂糖水（ジュース）の密度は水より大きい。したがって、ジュースに浮いた氷が融けた場合、氷が融けてできる水の方がジュースより軽いので、ジュースの上にたまり、氷が融けた水が氷の周りを取り囲むようになる。ジュースに比べ、氷が融けて水は冷たいので、氷を融けにくくする。

一方、ウイスキーの場合は氷が融けて発生した水はウイスキーより比重が大きいのでコップの底の方へ沈み込んでいく。氷が融けてできた冷たい水はコップの底にたまり、ウイスキーを押し上げ、氷は温度の高いウイスキーに囲まれる。このため、氷は融けやすくなる。

つまり、ウイスキーの場合は氷が融けてできる水が対流を起こすから融けやすいということになります。

#### 講評

残念ながら、正解した答えは1つしかありませんでした。多くの可能性の中に「密度」というキーワードを書いた例もありましたが、正解には至っていませんでした。実験の際にはよく観察して、ジュースの場合には氷の周りに水が溜まっていることに気がついていたり人もいたのに残念です（これに気がついてもらうために、無色透明の砂糖水とアルコールの水溶液ではなく、色のついた材料（ジュースとウイスキー）を用意したのだが...）。また、ジュース、ウイスキーだけではなく、水に氷を浮かべて実験した人も何人かいました。結果はジュースとウイスキーの中間の結果になるはずで、実際そうなっていました。なぜそうなるのかの判断基準が一つ増えるので、これは非常にいいアイデアでした。正解にたどり着いた人も水での実験をしていました。多く見受けられた答えが「お酒は飲むと体が熱くなるのでエネルギー

をもっているのが「融けやすい」というものでした。確かに、アルコールはエネルギーをもっているが、それは体内でアルコールを酸化（酵素を介したゆっくりとした燃焼と思えばいい）して、別の物質（一時的には有毒なアセトアルデヒド（お酒を飲んだときに酒臭くなる原因物質、そういう意味では本当は酒臭いのではない）になり、さらに、肝臓で無害な物質に化学変化する）に化学変化を起こすからです。化学反応が起こっているかどうかは一目瞭然でしょう。確かに、水に溶かすだけで熱を発したり、吸収したりする物質もありますが... この場合は、ジュースもウイスキーももともと水溶液なので無視できます。また、別の怪しい解答に「アルコールは蒸発しやすいのでエネルギーが多いと考えられ、氷に多くの熱を与える」というものがありました。皆さんも注射の経験はあるでしょう。そのときアルコールで消毒しますが、暖かく感じるでしょうか？冷たく感じますね。物質は蒸発する（要するに、液体が気化する）とき、接しているものから熱を奪います（それは、気化するには気化熱分だけのエネルギーが必要だから）。それを思い出せば、アルコールが蒸発することは温度を下げる効果になって、逆効果だということに気が付くでしょう。

ちなみに、この問題は京都大学の地球科学実験 A という科目のレポートに出されたことがあります。

## 4 課題 4

### 課題

1 辺（直径）1.2cm の 3 次元の凹凸のある物体（例えば、金平糖のようなもの）の表面積を計ることを考えます。ただし、数百、数千の物体の表面積を測定しなければならないので、1 個の測定に手間をかけられません。できるだけ効率的で精度の良い測定方法を考案してください。また、

1. 何が測定誤差の原因になるのか。
2. どのくらいの精度で計算できるのか。
3. 1 個の測定にどのくらいの時間がかかるか。

も考察してください。参考のために金平糖を用意しましたので、眺めながら、食べながら考えてください。この実験機材は食べて結構です。

### 解説

凸凹したものの表面積をどうやって正確に計るか、これは難しい問題です。そういう意味では正解がない問題です。皆さんの斬新なアイデアを期待していたのです。大きなものであれば、パッチワークのように紙などを貼り付けて、後で剥がしてその面積を測ってもいいでしょう。また、人形、模型を作るための物体の形をレーザーを使って測定する装置があります。レーザー光線をあて、物体の表面の位置をいろいろな点について測定します。このデータがあれば表面積は計算できます。ただ、問題なのは形が複雑でどの方向からレーザーをあてても、レーザーの届かないような窪んだ表面がある場合には使えません。また、この方法では細かく測定点を取る必要がありますが、そのためにはレーザービームを細くしなければなりません。この方法で数センチのものを測定できる装置を開発した研究所もあるようですが、金平糖のような 1 センチ以下のものでは精度が十分ではないでしょう。しかも、これらの方法では時間がかかってしまうので、100 個、1000 個あると大変です。

たまに、テレビのコマーシャルなどで椰子ガラ活性炭には泡のような小さな穴があいていて、臭いをよく吸着する、その穴の表面積は... というのがあります。乾燥剤として知られるシリカゲルも同じような構造をもっています。これらの表面積はどうやって計っているのでしょうか？これは沢山の物質を容器に入れ、その容器にガスを注入し、どれだけのガスが吸着されるかを測定します。単位面積あたりどれだけのガスが吸着されるかが分かれば表面積が分かります。こう言う装置が市販されているそうです。金平糖でも沢山の平均の表面積ならこの装置で測定できそうです。

さて、金平糖の表面積を測定する必要があったときに私が（時間もお金も装置もなかったときに）用いた方法は、金平糖をポリマーコーティングするという方法です。具体的には、金平糖にマニキュアを塗り、コーティングする前と後での質量の変化を測定し、マニキュアの密度から体積を計算する。それとは別に、直径の分かっている球形の物体にマニキュアを塗り、体積を求め、直径が分かっていることでそれから計算した表面積で割ることにより、自分がどの程度の厚みでマニキュアを塗っているかを計算します。金平糖でもこの厚みで塗れるとして、金平糖の表面積を計算しました。これを 50 個についてやりました

が、マニキュア2瓶を使い、臭いで頭がくらくらしていました。あまりお勧めできる方法ではありません。さて、この方法の精度は以下に一樣にマニキュアを塗れるかにかかります。一樣に塗れるポリマーを探すことがポイントになります。

## 講評

提出された答案で実行可能そうな方法を書いているものはほとんどが、表面にいろいろなものを塗る、まぶすなどの方法がほとんどでした。そういう意味では、頭の固いおじさんの思考と離れられていなかったの、残念に感じました。しかし、方法の記述はよく細部まで詰められたものもあり、感心させられました。表面にゴマをまぶすというものがありました。ゴマではちょっと精度が悪すぎませんか？気になったのは、「金平糖を一度溶かし、表面積を計りやすい形にして測定する」というのがあったことです。物質の密度が一定であれば、どんなに形を変えようが体積は一定で変化しません。しかし、形が変われば表面積は変わるので、この方法は取れません。もともと、私が金平糖の表面積を計る必要があったのは体積と表面積を用いて、金平糖の形を数値的に示す指標を計算するためだったのです。答案の中には、すばらしい提案もありました。表面積を測定したいものをMRI（核磁気共鳴を用いた断面の図を測定（この装置のコンピューターはものすごい数の連立方程式を解いているので、実際には計算という方が適切かも）する装置、X線を使っているCTスキャンと同じような装置（MRIでは脳の働いている場所がわかるなど、もっと高機能だが...）で断面を何箇所も測定し、その画像をつなぎ合わせて表面積を計算するというものでした。この方法は表面の位置だけを測定するレーザーによる測定よりも優れています。物体の内部に空洞があっても分かりますから。この測定方法は積分で面積を求める概念そのもので、それを理解しておくことは重要です。ただ、この方法の問題点は、MRIの分解能がどの程度かということとMRIの装置には億単位のお金がかかり、病院では診断に重要なのでいつも予約が一杯で、おいそれと使わせてもらえるものではないということ。最近では、科学実験用の小型のものもあるようですが...