

第7回数理科学コンクール課題解説

平成16年11月3日 千葉大学先進科学教育センター

目次

はじめに	2
優秀者氏名	4
1 課題 1	6
課題	6
解説	6
講評	6
2 課題 2	8
課題	8
解説	8
講評	8
3 課題 3	10
課題	10
解説	10
講評	10
4 課題 4	11
課題	11
解説	11
講評	12

はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第7回数理学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講評会を行う。

過去6回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第7回数理学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りには基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

千葉大学教授 井宮 淳

千葉大学助教授 植田 毅

(五十音順)

平成16年11月3日

優秀者氏名

平成16年7月25日に開催しました第7回数理科学コンクールの参加者の皆さんのすばらしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

第7回数理科学コンクール優秀者

- 金樺賞 グループ1 北奈苗, 早川萌
グループ11 金瀬篤彦, 金子弘明, 木村峻介
阿部翠空星
谷原圭祐
- 銀樺賞 グループ2 太田奈緒香, 太田真由香
グループ7 鶴岡歴人, 小俣泰隆, 安田佑也
グループ8 寺西智信, 加藤佑一, 指田朝郎
グループ10 渡邊創士, 柏木亮太, 原諒太, 明野仁郎
藤ヶ谷悠己
中川達規
藤井一徳
篠塚愛未
- 学長賞 北奈苗

- 課題 参加者名
- 1 谷原圭祐, 藤ヶ谷悠己
グループ1 北奈苗, 早川萌
 - 2 グループ1 北奈苗, 早川萌,
グループ2 太田奈緒香, 太田真由香,
グループ8 寺西智信, 加藤佑一, 指田朝郎
 - 3 谷原圭祐, 中川達規, 藤井一徳, 篠塚愛未, 阿部翠空星,
グループ1 北奈苗, 早川萌
グループ10 渡邊創士, 柏木亮太, 原諒太, 明野仁郎,
グループ11 金瀬篤彦, 金子弘明, 木村峻介
 - 4 阿部翠空星,
グループ1 北奈苗, 早川萌,
グループ7 鶴岡歴人, 小俣泰隆, 安田佑也,
グループ11 金瀬篤彦, 金子弘明, 木村峻介

千葉大学先進科学教育センター長

教授 上野信雄

平成16年11月3日

1 課題 1

課題

だんご虫（の仲間）は交替性転向反応を示すことが知られています。交替性転向反応とは例えば格子状になった通路を通るときに交差点で右に曲がれば次は反対側に曲がるという行動のことを言います。この行動はかなり以前から知られ、いろいろな人から興味をもたれて、小中高校の自由研究の題材などにもよくとりあげられています。2月11日放送分「トリビアの泉～素晴らしきムダ知識～」(フジテレビ、水曜 21:00～21:54)にも、「ダンゴムシは壁にぶつかり右に曲がると次は左に曲がる：88へえ(金の脳)」

と紹介されたらしい(出題者は見えていない)。そこで、疑問なのは「なぜだんご虫は交替性転向反応をするのか」ということです。これまでに、色々な説が出されていますが、確かなことは分かっていません。だんご虫にとってどういう有利なことがあり、交替性転向反応と言う性質を獲得したのかを考えてください。また、ロボットに交替性転向反応をさせるためには、どんな機能が必要でしょうか？

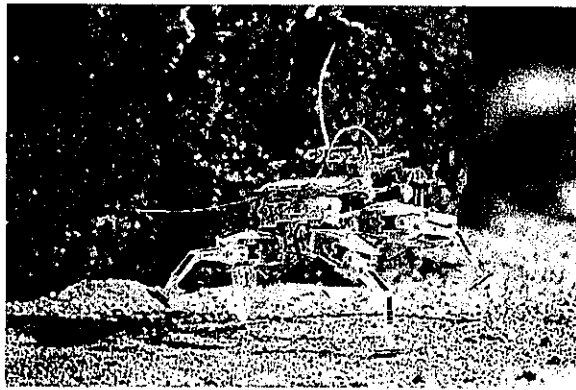
解説

この問題は、最近、工学(特にロボット工学)、物理学分野で生物の数理的研究が盛んになっているので出題してみました。昆虫はそれほど複雑でない制御系(神経系)で複雑な行動を実現しており、ロボットを作る場合に参考になります。そして、昆虫をまねたロボットが登場しています。NASAでも宇宙探査用ロボットとして昆虫をまねた6本足のロボットを開発しています。図1(a)(NASAのweb siteより)そのために、昆虫の動きや神経回路などを調べる研究が行われています。細菌の遺伝子を調べ、その遺伝子がどういった蛋白質を合成するかを調べ、細胞内で起っている蛋白質の合成の化学反応を丸ごとコンピュータで再現して(日本では慶應義塾大学先端生命科学研究所所長(環境情報学部教授)の富田勝先生を中心に開発されたE-CELLが有名です)、生命の秘密、薬の開発や進化研究に応用しています。世界に先駆けて二足歩行ロボットASIMOを開発したHONDA(本田技術研究所)もアシモ、ジェットエンジンのみならず、昆虫の神経回路の研究もしています。図1(b)(HONDAのweb siteより)そのような研究の第一歩である、現象論の観察から機能を考察してもらいました。

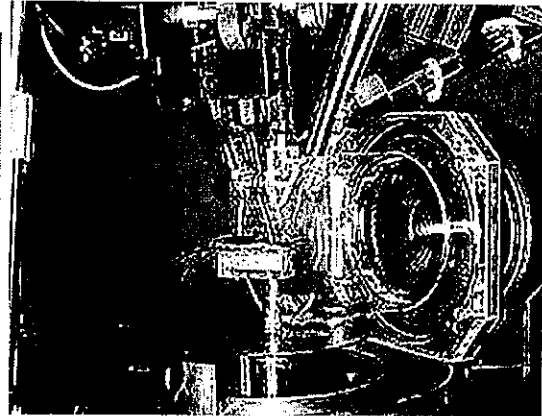
講評

答案には思考実験してみたもの、実際に実験で試したもののいろいろありました。評価としては、根拠がちゃんとしていて論理的に展開されている思考実験や仮説を立てて、実験で仮説を示そうとしたものは仮説が正しいかどうかには関係なく高評価しました。

正解についてですが、この問題には正解はありません。だんご虫が交替性転向反応をする利点については、多くの人が、「同じところにとどまらず、遠くまでたどり着けるから」という解答を書いていました。これは正しい答えだと思います。これとは別に、オスのカイコガはメスのフェロモンを触覚で感じ、強く感じる方へ直進するが、見失ったときはジグザグに動き始めます。ジグザグ運動をするのはその周辺に存在しているであろう物を探すときに効率がいいものなのかもしれません。



(a)



(b)

図 1: 生物の動きを模倣するロボット

さて、交替性転向反応をロボットで実現させる方法ですが、これもいろいろな答えがありました。触覚を使って、壁伝いに動いているだろうと言う事で、ロボットに2つの動輪を設け、壁に接触している側の車輪を外側の車輪よりも少し遅く動かすというアイデアもありました。触角をつけて触角が壁を感じている方に向きを少し傾げるのもいい方法でしょう。

これでは交替性転向反応が確実ではないので、確実に行わせ、かつ、15センチほど進めば昔にどちらに曲がったかを忘れるということを実現するのであれば、次のようなものが考えられるでしょう。

駆動系は360度回転できる小さな前輪一つとモーターで左右独立に駆動される大き目の後輪とします。左右に明るさのセンサーを取り付けます。だんご虫は暗いところに住んでいるので、より暗い方向へ進むようにします。交差点では壁がなくなる分明るさに変化があるでしょう。そのことで、交差点であることが認識でき、確実に、交替性転向反応をさせるために、交差点でどちらに曲がったかを記憶させる装置(メモリー)を用意すれば良いでしょう。メモリーの容量(覚えられる回数)が比較的少なくしておいて、それ以上覚えられなくすれば、光の明暗だけに頼ることにすれば、ある程度の距離を進むと交替性転向反応を示さなくなることも再現できるでしょう。覚えた内容はある程度時間が経てば忘れるようにしておけば、同じことの繰り返しもできるようになるでしょう。

昆虫をまねたロボットを作ることは性能の良いロボットを作るだけでなく、同じような高度をさせることにより、昆虫の中がどのような構造になっているか、どのような制御になっているかが分かるようになります。昆虫を理解するためにも重要な方法です。

2 課題2

課題

植物の葉には葉脈があります。葉脈は植物の葉の隅々までに水、養分を行き渡らせる役割のみならず、葉を支える機能も併せ持っています。さまざまな植物種でいろいろな形の葉の形がありますが、同じ種類の植物であれば、その葉脈は同じような模様になっているので、その葉脈の分岐（枝分かれ）には法則性があるはずです。葉脈の模様に見え隠れした枝分かれの法則を見つけ出してください。植物の種類が違えば法則も違うかもしれないし、同じかもしれません。いろいろなことを考えてください。

葉はキャンパス内に生えている植物のものを採集してきてください。

解説

この課題は、身近なところにまだまだ不思議なことはいっぱいある、身近なのに未だに解明されていないことはいっぱいあることを分ってもらいたくて出題しました。今でも、天気予報や台風の進路がちゃんと求まらないように、まだ、解明されていないことはたくさんあります。一枚の紙片が空中を舞い落ちる現象を研究した論文も最近発表されましたし、水道の蛇口からポタポタ落ちる水滴の形、時間間隔、質量の関係の理論研究も最近行われています。このような、身近だけでも物理的には複雑な現象は最近のコンピュータの発展に伴ってようやく研究できるようになりました。

この課題もその一つで、2002年にカエデ科の植物の葉脈がどのような構造をしているかを研究した論文がフランス人によってアメリカ物理学会の論文誌に発表されました。これも、葉脈の構造をコンピュータに取り込み、拡大縮小して、分岐点を探し、その分岐点での葉脈の角度、太さを自動的に測定する画像処理ができるようになったから実現しました（そういう意味では、今回はちょっと無謀な試みだったかもしれません。）

その論文の結論は以下のようなものでした。まず、葉脈は分岐点で3つの枝が合流する。つまり、太い枝が二つに分岐する。それぞれの枝のなす角度は3つのうち最も細い枝の直径と太い枝の直径の比によって決まる。そして、葉脈のなす角（配置）は以下のように再現されます。3本の紐を1点で結びます。その紐をそれぞれ葉脈の枝の直径に比例する力で引っ張ったときに、紐が作っている角度がその太さの葉脈の角度になっています。つまり、3本の内2つが太ければ、紐を引く力も強く、残りの細い枝の力は弱いので、ほとんどまっすぐ伸びた枝に真横に細い枝が伸びるということになります。逆に、3つともほとんど同じ太さであれば、3つの力が同じなのでそれぞれの紐、つまり、葉脈の枝がなす角度は同じで、120度ずつということになります。

講評

この課題では、課題を作成する元になった論文のなかの力学の性質を発見することを期待していたので、分岐が3つ又になっていること、それが、大きさによらないことなどを発見してくれた人を高く評価しました。

しかし、上で説明した結果はあくまでカエデ科の葉の結果で、他のものではどうなるか分かりません。特に、笹や竹の葉の葉脈は分岐していませんし、植物によって多様性があります。その多様性について議論してくれた答案もありました。それでも、論理的な説明ができていれば高く評価するつもりでしたが、時間、実験器具の制約もあったので、もう一歩というものが多かったように思います。

また、木のどの部分の葉かによって、その葉脈の違いを考察した答案もありました。なかなか面白い着眼点だと思います。展開された論を否定する材料を持ち合わせていないので、否定することはできません。惜しむらくは、推測ではなく、もう少し根拠をはっきりと示してもらえると高く評価できたと思います。

今後とも、皆さんが身の回りの自然に目を向け好奇心を抱き続けてくれることを望みます。

3 課題3

課題

倒立コマとは、回転している間に逆立ちしてしまうコマです。逆立ちをするまでの時間何が影響するか教えてください。

コマのキットが用意してあります。これに、重りをつけたりすることもできます。硬貨の一部分に重りをつけて、倒立コマを作ることもできます。

解説

コマの運動を解析することで、一冊の専門書が出来上がります。逆立ちコマは、次の4つの状態を移り変わります。ただし、コマの回転軸は最初、鉛直軸と一致しているとします。

1. コマの回転軸と鉛直軸との開き角が増加する。
2. 軸が床につくとコマが徐々に起き上がる。つまり、鉛直軸とコマの回転各の開き角が減少する。
3. コマの回転軸を鉛直軸に一致させ、安定に回る。
4. 回転速度が減少しコマが倒れて回転を止める。

1. が実現できるためには、コマの底面が球形に近く、しかも、重心が球の中心より少しだけ下に有る必要があります。また、倒れていく速さは、球の半径、面の摩擦係数の両方に比例します。

2. を実現するコマは「起き上がりコマ」とばれます。倒立コマを最初からさかさまに回すとこの性質を持っていることがわかります。「起き上がりコマ」の起き上がる速さは、コマの重さ、重心までの軸の長さ、摩擦係数それぞれに比例します。別の言い方をすれば、コマの首振り速度の周期と摩擦の力に比例します。

したがって、コマの球の部分の半径、コマの重さ、重心の位置を変えれば思い倒立コマができます。同じコマであれば、回転面が少しざらざらしたコマのほうが倒立しやすいことがわかります。滑りやすい床で倒立コマを回してもなかなか倒立しなことを経験したことがあると思います。コマが同じなら、床はつるつるでないほうがコマが倒立しやすいことがわかります。

講評

コマの形状に関して皆さん考えていました。重さに気が付いて、粘土を付加したり、コマを切ったりしていました。また、状態1から状態2へと旨く移るための性質を考えていました。これがもっとも重要です。コマの丸い部分と軸との関係から軸が長すぎても状態1から状態2に移りません。状態1、状態2、状態3と移って行くためには軸もある程度の太さがある必要があります。

しかし、コマを回す床の性質に触れた解答はありませんでした。

4 課題 4

課題

「ある平面図形の透視図とは、図形を空間におき、
一点から出る光によってできるその図形の影である。」

「空間の点を平面に垂直に降ろした平面上の点を、空間の点の正射影と言う。空間にある直線は点を連ねたものであるから、同様に直線の平面上への正射影を考えることができる。」

以上の二つの性質に基づいて次の問題に答えてください。

1. どんな凸四角形にもそれを、透視図とする正方形があることを示してください。
2. 理想的な三脚として、同じ長さの三つの直線分が一点で交わっているものを考えます。この理想的な三脚の正射影としてできる脚の影の長さに関して成り立つ関係を考えてください。

解説

共になんとなくわかるのですが、なかなか解答を書けない課題です。

1. の性質は、建物の写真から、元の図面を起ことに利用されます。また、建物の完成予想図を描く場合の基礎にもなります。これらは、ゲームや映画の CG のモデル生成のために利用されます。

この性質をもう少し、幾何学的に述べると、

「凸四角形の相対する辺を延長すると、一点で交わる。」

となります。また、六角形に関して以下の定理があります。

「楕円に内接する六角形の相対する辺を延長して決まる 3 つの交点は同一直線上にある。」

六角形に関する定理はパスカルの定理と呼ばれています。上の 2 つの定理で、2 直線が平行な場合は無限遠点で交わると考えます。

問題は、

「有る平面上の図形を別の平面上に中心投影によって変換する変換を考え、この変換によって正方形を任意の凸四角形に移せるか、また逆も真か。」

と聞いています。平面上の図形を別の平面上に中心投影によって変換する変換をアフィン変換といいます。さて、課題の数学的な意味は以下のようになります。

「任意の凸四角形は、アフィン変換で正方形に移すことができるか。」

となります。その答えは「できる」です。

答えを作るには、線形代数を利用するか図学を利用します。求めるものは、投影の中心つまり、光の出る点の 3 次元空間の位置と正方形の描かれるべき平面です。この性質を図学では定規とコンパスだけを利用して解きます。

図形を楕円に内接する多角形として、同じ問題を考えるとどうなるでしょうか。凸多角形の辺の数が増えると曲線に近づきます。そして、円と楕円に関しては以下の性質があります。

「斜楕円錐を適切な平面で切ると円が現れる。」

すなわち、任意の楕円は、円の中心投影になっています。

2. の問題の答えは

「影で決まる3辺のうちの2辺の作る菱形を考える。この菱形の、短い対角線は残りの1辺と同じ長さで、同一直線状にあり、反対の向きを向いている。」

となります。ベクトルの言葉で書けば、

「3脚の影の辺の決めるベクトルの和は零である。」

となり、さらに、力学の言葉で書けば

「3脚の影の決める力のベクトルは釣り合っている。」

となります。

講評

1. の問題を三角形について考えるとどうなるでしょうか。また、2. の問題に一般化を3つ考えてみましょう。

1. 3次元のつりあった n 脚を考える。脚の正射影の満たす性質を導きなさい。
2. n 次元空間の中でつりあった n 脚を考える。脚の2次元平面への正射影の満たす性質を導きなさい。
3. n 次元空間のつりあった m 脚を考える。脚の2次元平面への正射影の満たす性質を導きなさい。

となります。考えてみてください。まず、 m 脚がつりあうためには何が必要でしょうか。3次元の例から考えると、 m 脚がつりあうためには、脚の成す三角形の重心の立てた鉛直軸の上に脚の交点がある必要があります。このことから n 脚の底面は正 n 角形になる必要があります。さらに、この多角形の重心から立てた鉛直軸の上に脚の交点があることとなります。この先を考えてみてください。