

第10回数理科学コンクール課題

1. 4つの課題を用意しました。いくつの課題に解答してもかまいません。また、1つの課題にいくつ解答してもかまいません。例えば、実験をして見つけた解答と、実験をせずに考えた解答との2つの解答を提出してもかまいません。むしろ2種類以上の解答を歓迎します。その場合にはどうして答えが2つ以上になったかも説明してください。
2. グループで参加した諸君は、1つの課題に1つの解答でも、また、複数の解答でもかまいません。たとえば、協力して解答を考えたけれども、途中から別々の結論を思いついた場合には、それぞれの参加者が別々に解答してもかまいません。その場合、1つの解答を一緒に提出する参加者の名前を、解答用紙に記入してください。たとえば、Aさん、Bさん、Cさん3人のグループで、AさんとBさんが1つの解答を、Cさんが1人で、別の解答を用意した場合には、Aさん、Bさんが用意した解答用紙には、グループ番号、AさんBさん2人の名前と参加番号を、もう1つのCさんの解答用紙にはグループ番号、Cさんだけの名前と参加者番号を記入してください。
3. 用意した解答用紙を何枚使用してもかまいません。ただし、異なる番号の課題は同じ解答用紙に記入しないでください。また、1つの課題に1つ以上の解答用紙を使った場合は解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください。1つの課題に2つ以上の解答を提出する場合も同様に解答用紙の記入欄に課題ごとの通し番号と総枚数を入れてください。
4. 課題に関する質問は監督者に質問してください。どんな質問でもどしどし質問してください。
5. 5階のH-52講義室と5階のフロアーには解答を考えるための実験用の道具、教材、機器が用意してあります。何を使っても構いません。工具の利用法は監督者に相談してください。

課題 1

日本人の血液型の人口比率はおよそ

A 型	37.3%
O 型	31.5%
B 型	22.1%
AB 型	9.1%

となっています。

血液型の遺伝法則はすでに確立しています。ABO 式血液型の遺伝因子は A, B, O の 3 種があり、その中のいずれか 2 つの因子を親から受け継ぐことにより 1 個人の血液型が決定されます。A 型は (AA) か (AO), B 型は (BB) か (BO), AB 型は (AB), O 型は (OO) の場合です。この法則に関する限り A 型と B 型には何ら優劣の差はありません。にもかかわらず、現状の日本人の血液型の人口比率では O 型は遺伝上の劣勢にもかかわらず B 型よりも多く、また AB 型が非常に少なくなっています。

A 型と B 型の人口比の差の原因は何でしょうか？この血液型の人口比は時代によって変化するのでしょうか？大昔の血液型の人口比率はどうなっていたのでしょうか？また、未来での人口比率はどうなるのでしょうか？A 型ばかりになるのでしょうか？

A 型と B 型の人口比の差の原因と血液型の人口比率の時間変化を考えてください。ただし、以下のことを条件とします。

- (1) 現実には、血液型で男女の相性を占い、結婚相手を選ぶときに血液型を条件にすることもあるが、ここでは、結婚相手は血液型に関係なくランダムに選ばれるものとする。
- (2) 各血液型とも男女の比率は同じであるとする。
- (3) 現実社会では個人の自由であるが、ここでは独身主義者は居ないものとする。
- (4) 現在の首都圏では考え難いが、各夫婦は平均二人の子供を生むものとする。
- (5) 突然変異で血液型が変化する可能性も考えられるが、ここでは無視する。

課題 2

飛込競技を題材にしたコミックやテレビドラマも現れ、次第に身近になってきました。飛込競技は、弾力性のある飛び込み板より跳ね上がって飛び込む「飛び板飛び込み」（高さは1mと3m）と弾力のない飛び込み台から飛び込む「高飛び込み」（高さは5m, 7.5m, 10m）の二種類があります。いずれの競技でも、落下中に空中で回転したり、ひねりを加えたり、体を丸めたりといった様々な演技を行い得点を得ます。得点を大きく左右するポイントが着水時に如何に水しぶきを小さくするかということです。入水時の姿勢により水しぶきの立ち方が変わります。では、なぜ水しぶきが立つのでしょうか？水しぶきの立ち方は落下物の形で決まるのでしょうか？

問題を単純化するために、落下物の形、大きさ、飛び込む速度が同じ場合を考えると、何が水しぶきの立ち方を左右するのか、しぶきを小さくするためにはどのようにすればいいのか考えてください。

実験用に水槽とスーパーボールなどを用意してあります。自由な発想で実験をして答えを出してください。

課題 3

昔話や神話の中には、現代の技術でも実現できないような荒唐無稽な装置が語られていることがあります。かつては夢物語と考えられていましたが、考古学の成果により、過去には現在と違った意味での科学技術が存在していたことも知られています。とはいっても科学技術ですから物理法則に反することはできません。さて、千夜一夜物語の中に「アリババと 40 人の盗賊」という有名な話があります。この話の中には「開け胡麻」を合図に開く洞窟の入り口の岩戸がでできます。現代に置き換えれば、さしずめ「音声認識による自動開閉装置」でしょうか。千夜一夜物語は、中世イスラム世界でその原型が出来上がったといわれています（「アリババと 40 人の盗賊」に関しては 20 世紀初頭にヨーロッパで翻訳が出版されるときに創作されて付け加えられたとする説もあります。）。今のところ、中世イスラム世界には、現在の意味での商用電気技術や、電子式のコンピュータはなかったようです。そこで、電気で動くモーターなどに頼ることのない、「自動扉の開閉装置」の原理を考えてください。また、「音声認識による扉開閉装置」も考えてください。

課題 4

平面上に書かれた正3角を用意します。この正三角形の各頂点に1から9までの数字と空白をランダムに書きます。すると文字の組合せと配置とが異なる多数の多角形ができます。このとき、異なる文字配置がいくつできるでしょうか。たとえば、正三角形の場合は、文字の書かれていない三角形が1種類、1文字の三角形が9種類、さらに、文字2種類と文字3種類の三角形があります。正六角形の場合の異なる配置はどれだけあるでしょうか。また、平行四辺形の、菱形、正四面体、正方形などの頂点に数字を割り振る場合も考えてください。さらに、多角形ではなく、多面体、たとえば 正四面体や、立方体の場合にはどんな性質が成り立つでしょうか。導いた法則を元に、次のことを考えてください。このような「問題そのもの」を一般化するとどのような問題になりますか。つまり、上に述べた問題をもっと一般的に記述した問題はどのような問題になりますか。特別な場合に上に述べた問題を含むような、「問題」を作ってください。