

第10回数理科学コンクール課題解説

平成19年11月3日 千葉大学先進科学研究教育センター

目次

はじめに	2
優秀者氏名	4
1 課題 1	5
課題	5
解説	5
講評	8
2 課題 2	9
課題	9
解説	9
講評	10
3 課題 3	12
課題	12
解説	12
講評	13
4 課題 4	14
課題	14
解説	14
講評	15

はじめに

明治の文明開化以来、我が国は欧米先進国の科学技術を効率よく吸収して発展してきました。戦後もこの傾向は基本的には変わっていません。現在、我が国は大量の自動車や電子機器を輸出して経済大国となっていますが、これらの工業製品の基本原理はほとんど外国で考えられたものです。欧米諸国との間に経済摩擦や文化摩擦が生じている現状を考えると、これからの我が国で大切なことは独創性のある個性的な人材を育成して、新しい科学技術のフロンティアを切り開き、世界に貢献することであると考えられます。

千葉大学では、日本のみならず、世界の科学技術の先端を担う若者を発掘し、育成するための一助として、本年度も、第10回数理科学コンクールを開催しました。このコンクールの特色は次の通りです。

1. 自由にゆったり考える

試験時間は6時間、途中の休憩や参考書・ノート等の持ち込みは自由とする。

2. たのしい物理・数学の発見

物理や数学のカリキュラムにとらわれず、物理や数学の本質に根ざした、考えて楽しい問題を提供する。

3. 多彩な才能の評価

様々な参加者の優秀な能力やユニークな発想を多面的に評価するため、問題をたくさん解いたものだけでなく、1題に集中してすばらしい発想を出したものも表彰の対象にする。また、グループとしての総合能力を評価するため、個人参加だけでなく、グループ参加も認める。

4. 人材の育成

コンクール参加者の物理や数学の能力をさらに高めるため、コンクールの表彰式と講評会を行う。

過去9回のコンクールに引き続き、多くの中高生の参加者があり、楽しい雰囲気の中で、いろいろユニークなアイデアが生まれました。中学生も、高校生に負けず優秀でありました。そして、答案を見ると、それぞれの問題に興味を持ちながら解答していることが読んでとれました。

第10回数理科学コンクールの課題の解説と提出された答案の評価を以下にまとめます。解説に述べてあるように、各課題は課題出題者の周りにある基本的な問題や最先端の問題、さらには歴史的に意味のある問題を元にして作成しました。課題提出者一同、みなさんの素晴らしい洞察力と表現力を前にして、大変感心いたしました。

参加者の皆さんが今後、科学する心を磨き続け、我国の科学の発展に貢献することを課題作成者一同希望します。今後も諸君と共に科学することを楽しみたいと考えています。千葉大学では今後も引き続きこのコンクールを実施する予定です。物理・数学に興味がある中高生の積極的な参加を期待しています。課題作成者もさらに研鑽をかさね、おもしろく、しかも科学の本質に迫る課題を考えていきます。

課題作成者

千葉大学教授 井宮 淳

千葉大学准教授 植田 毅

(五十音順)

平成19年11月3日

優秀者氏名

平成19年7月29日に開催しました第10回数理学コンクールの参加者の皆さんの素晴らしい答案の中から以下の参加者諸君を表彰することを決定しました。

第10回数理学コンクール優秀者

金樽賞 小松由梨果

大杉卓也

銀樽賞 加賀俊生

菅本知望

大河内雅喜

グループ1 仲村梨沙子 岩上真歩 佐藤日向子 山田智美

グループ8 石井真由美 指田瑛美莉 高橋春菜

グループ12 安達啓晃 渡辺友洋 横川智史

グループ13 小団扇麻里 井口由加里 小林ひかる

グループ15 佐藤天哉 高橋雄司 千葉宏樹 平野 誠 関口 俊

学長賞 稲見勝朗

安長理紗

課題 参加者名

1 小松由梨果

2 グループ13 小団扇麻里 井口由加里 小林ひかる

グループ15 佐藤天哉 高橋雄司 千葉宏樹 平野 誠 関口 俊

3 稲見勝朗

安長理紗

大杉卓也

小松由梨果

菅本知望

大河内雅喜

加賀俊生

グループ1 仲村梨沙子 岩上真歩 佐藤日向子 山田智美

グループ8 石井真由美 指田瑛美莉 高橋春菜

グループ12 安達啓晃 渡辺友洋 横川智史

4 大杉卓也

千葉大学先進科学研究教育センター長

教授 上野信雄

平成19年11月3日

1 課題 1

課題

日本人の血液型の人口比率はおおよそ

A 型	37.3%
O 型	31.5%
B 型	22.1%
AB 型	9.1%

となっています。

血液型の遺伝法則はすでに確立しています。ABO 式血液型の遺伝因子は A, B, O の 3 種があり、その中のいずれか 2 つの因子を親から受け継ぐことにより 1 個人の血液型が決定されます。A 型は (AA) か (AO), B 型は (BB) か (BO), AB 型は (AB), O 型は (OO) の場合です。この法則に関する限り A 型と B 型には何ら優劣の差はありません。にもかかわらず、現状の日本人の血液型の人口比率では O 型は遺伝上の劣勢にもかかわらず B 型よりも多く、また AB 型が非常に少なくなっています。

A 型と B 型の人口比の差の原因は何でしょうか？この血液型の人口比は時代によって変化するのでしょうか？大昔の血液型の人口比率はどうなっていたのでしょうか？また、未来での人口比率はどうなるのでしょうか？A 型ばかりになるのでしょうか？

A 型と B 型の人口比の差の原因と血液型の人口比率の時間変化を考えてください。ただし、以下のことを条件とします。

- (1) 現実には、血液型で男女の相性を占い、結婚相手を選ぶときに血液型を条件にすることもありますが、ここでは、結婚相手は血液型に関係なくランダムに選ばれるものとする。
- (2) 各血液型とも男女の比率は同じであるとする。
- (3) 現実社会では個人の自由であるが、ここでは独身主義者は居ないものとする。
- (4) 現在の首都圏では考え難いが、各夫婦は平均二人の子供を生むものとする。
- (5) 突然変異で血液型が変化する可能性も考えられるが、ここでは無視する。

解説

この課題はジャンルの的には数理生物学、数理生態学の範疇に入るものです。数理物理学の守備範囲でもあります。生物の振る舞い、生物内で起こる現象は複雑ですが、その振る舞い、現象をいかにシンプルな法則で説明するかがポイントになります。

メンデルによる生物の遺伝の法則は非常にシンプルで非常によく現象を説明できる優れた理論です。血液型も、突然変異など特別な状況を除けば、高校の教科書で説明される遺伝法則で非常によく説明できます。

それによると、人の血液型の遺伝因子は A, B, O 型があり、各個人はその遺伝因子を二つずつ与えられています。持っている遺伝因子が (AA), (AO) の組み合わせのとき表現型は A 型, (BB), (BO) の組み合わせのとき B 型, (AB) のときのみ AB 型, (OO) のときのみ O 型となります。遺伝因子は、両親それぞれが持つ二つの遺伝因子のうちの一つずつを受け継ぎます。これにより世代間の血液型の現れ方が決まります。

この法則を数学的に表現するために、第 n 世代の固体数 (人数) を N_n , 各遺伝子型の人数を $(AA)_n$, $(AO)_n$, $(BB)_n$, $(BO)_n$, $(AB)_n$, $(OO)_n$ とする。このとき、

$$N_n = (AA)_n + (AO)_n + (BB)_n + (BO)_n + (AB)_n + (OO)_n$$

となります。

この課題で与えられた条件を考えると遺伝法則は以下のように説明できます。例えば、第 n 世代で (AA) 型の男性と (AB) 型の女性の夫婦ができる確率は、

$$((AA)_n/2)/(N_n/2) \times ((AB)_n/2)/(N_n/2)$$

(AA) 型の女性と (AB) 型の男性の夫婦ができる確率も同じであるから、第 n 世代で (AA) 型と (AB) 型の組み合わせの夫婦ができる確率は

$$2 \times (AA)_n/N_n \times (AB)_n/N_n$$

となります。全夫婦数は $N_n/2$ であるから、(AA) 型と (AB) 型の組み合わせの夫婦の数は

$$(AA)_n \times (AB)_n/N_n$$

となります。この夫婦からは (AA) 型, (AB) 型が同じ割合で生まれるので、各夫婦が 2 人の子供を生むとき、この組み合わせの夫婦から生まれる (AA) 型の子供の数は

$$(AA)_n \times (AB)_n/N_n$$

となります。

(AA) 型の子供が生まれる夫婦の型の組み合わせは他に (AA)・(AA), (AA)・(AO), (AA)・(AB), (AO)・(AO), (AO)・(AB), (AB)・(AB) の 6 通りあります。これらについても同様の計算を行い、(AA) 型の子供の数を全て足せば $n+1$ 世代での (AA) 型の人數 $(AA)_{n+1}$ が求まります。他の型の子供の数も求めると以下のようにまとめられます。

$$X_n = 2(AA)_n + (AO)_n + (AB)_n$$

$$Y_n = 2(BB)_n + (BO)_n + (AB)_n$$

$$Z_n = 2(OO)_n + (AO)_n + (BO)_n$$

として、

$$(AA)_{n+1} = X_n^2/(4N_n), (BB)_{n+1} = Y_n^2/(4N_n), (OO)_{n+1} = Z_n^2/(4N_n)$$

$$(AO)_{n+1} = X_n Z_n/(2N_n), (BO)_{n+1} = Y_n Z_n/(2N_n), (AB)_{n+1} = X_n Y_n/(2N_n)$$

となります。

これから、 X_{n+1} , Y_{n+1} , Z_{n+1} を計算すると簡単に

$$X_{n+1} = X_n, Y_{n+1} = Y_n, Z_{n+1} = Z_n$$

であることを確かめられます。また、

$$X_n + Y_n + Z_n = 2N_n$$

であるから、 $N_{n+1} = N_n$ となります。これらから、全ての遺伝子型の人数も世代によって変化しないことが示されます。したがって、この法則のみからは今の血液型の人口比は大昔から引き継がれ手いるという結論になります。

この法則を信じる限り、人類誕生以来血液型の人口比率は変わっていないこととなります。しかし、世界には B 型の比率が最も高い国も少なくなく、この差が突然変異のみに原因があるとするには無理があります。そこで、1982 年北海学園大学の世戸憲治氏は血液型適合・不適合論がキーポイントではないかと指摘しています。

血液型適合・不適合論とは胎児の血球にある血液型抗原と母親の血清中の血液型抗体とがの不適合により抗原抗体反応を起こすため、妊娠中流産しやすかったり、生まれてから黄疸になることが多いということです。血液型不適合となる胎児と母親の遺伝因子型の組み合わせは下表のようになる。

胎児	(AO)	(BO)	(AB)
母親	(OO) or (BO)	(OO) or (AO)	(AA) or (BB) or (AO) or (BO)

これから、胎児が (AB) 型の場合に不適合となる組み合わせが最も多く、胎児が (OO) 型の場合に不適合となる組み合わせはありません。これが、実際に AB 型が少なく、O 型が多い原因ではないかと考えられます。

世戸氏は簡単のためにこの不適合の組み合わせの場合には、そうでない場合に比べ出生率が一律に β 倍 ($\beta < 1$) になるものとししました。その場合の方程式は

$$\begin{aligned} (AA)_{n+1} &= \alpha X_n^2 / (4N_n), & (BB)_{n+1} &= \alpha Y_n^2 / (4N_n), & (OO)_{n+1} &= \alpha Z_n^2 / (4N_n), \\ (AO)_{n+1} &= \alpha X_n [(1 + \beta)Z_n + (1 - \beta)(AO)_n] / (4N_n), \\ (BO)_{n+1} &= \alpha Y_n [(1 + \beta)Z_n + (1 - \beta)(BO)_n] / (4N_n), \\ (AB)_{n+1} &= \alpha [2\beta X_n Y_n + (1 - \beta)(X_n + Y_n)(AB)_n] / (4N_n) \end{aligned}$$

となります。ここで、 α は総人口が全ての世代で同じになるように決定します。この方程式を解くにはある世代の全ての遺伝因子型の割合が必要となるが、現在の (AA) と (AO) の比、(BB) と (BO) の比がどちらも 1:2 であるとして、 $\beta = 0.9$, (AA)=0.124467, (AO)=0.248933, (BB)=0.0735333, (BO)=0.147067, (OO)=0.3151, (AB)=0.0910 を初期値としてこの式を解くと、図 1 の 314 世代から 450 世代の部分の解が得られます。計算は遺伝因子型で計算していますが、グラフは血液型の表現型の割合を示しています。

この結果、100 世代後には O 型の人割合が 95% を超え、他の血液型の人割合は極めて稀となることが分かります。

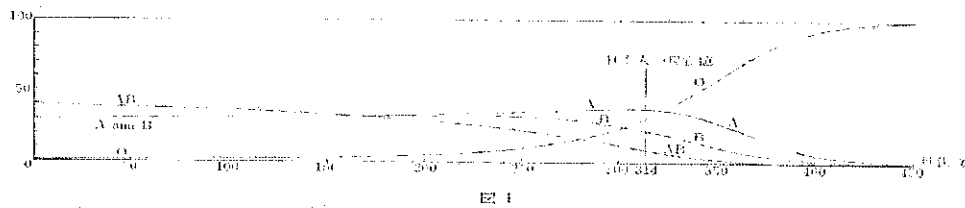


図 1:

では、逆に過去の血液型の比率はどうなっていたか？この方程式を過去に遡って解けばいいのだが、方程式は非線形であるためそれは簡単ではありません。世戸氏はさまざまな過去の血液型比率を仮定して方程式を解き、現在の血液型比率を再現するものを見つけました。

その結果が図 1 の 0 世代から 314 世代までのグラフです。これから、過去においては AB 型が最も多く、O 型はほとんどいません。A 型、B 型はほとんど同じ割合ですが、わずかに差があります。X, Y, Z では $X = 0.900028$, $Y = 0.899972$, $Z = 0.2$ となります。この極僅かな A 型、B 型の割合の差が現在の差を生んでいます。このような初期では非常に僅かな差でも時間がたつと大きな差に拡大する現象は非線形な方程式で記述される複雑系 (complex systems), カオス系の特徴です。

しかし、これらの結果はここで説明した条件、仮定でのもので、現実にもなるかどうかは、この模型が本質を突いているかに依ります。正確な記述を目指すならば突然変異など他の効果も検討しなければなりません。

参考文献

世戸憲治：“血液型の数理”，数理科学, NO.223, January, 1982, pp. 16-21

講評

血液型の遺伝の法則は高校の生物で習うものなので、中学生には難しい課題だったかもしれません。それでも、地道にしっかりと各世代で人口比がどのようになるのか試みた解答が見受けられました。それでもやはり、高校生の方が有利で、高校生の中には遺伝法則では人口比が $A:B:AB:O=3:3:2:1$ になり、世代変化しないことを見出した個人、グループがありました。中には、類人猿の血液型構成について考察したものもありました。これについては人間の血液型の比率の初期状態がどうなっていたかを考える上では非常に重要なアプローチです。チンパンジー、ゴリラなどは人間（世界的に見れば日本人とは血液型の構成がまったく異なるのだが...）の血液型構成とはことなるので他に何か血液型が世代変化する法則があるのが推定されます。

しかし、高校生を含めても世代間の方程式（漸化式）を用いて記述、解析した例はほとんど見られませんでした。高校数学で取り扱う数列、漸化式はこのような問題を取り扱うためにある、大学に入ればこのような問題を解析しなければならないので高校で数列、漸化式を学習するのだと認識してください。

2 課題2

課題

飛込競技を題材にしたコミックやテレビドラマも現れ、次第に身近になってきました。飛込競技は、弾力性のある飛び込み板より跳ね上がって飛び込む「飛び板飛び込み」(高さは1mと3m)と弾力のない飛び込み台から飛び込む「高飛び込み」(高さは5m, 7.5m, 10m)の二種類があります。いずれの競技でも、落下中に空中で回転したり、ひねりを加えたり、体を丸めたりといった様々な演技を行い得点を得ます。得点を大きく左右するポイントが着水時に如何に水しぶきを小さくするかということです。入水時の姿勢により水しぶきの立ち方が変わります。では、なぜ水しぶきが立つのでしょうか？水しぶきの立ち方は落下物の形で決まるのでしょうか？

問題を単純化するために、落下物の形、大きさ、飛び込む速さが同じ場合を考えると、何が水しぶきの立ち方を左右するのか、しぶきを小さくするためにはどのようにすればいいのか考えてください。

実験用に水槽とスーパーボールなどを用意してあります。自由な発想で実験をして答えを出してください。

解説

この課題は身近な現象でさえ世界の第一線の研究対象になっている、未解明なことがあることを分かってもらうために出題しました。水の中に物が落ちる、落ちれば水しぶきが発生する、この日常茶飯事に起こる何の変哲もない現象にも重要な物理法則が潜んでいます。

液体に物が落ちる時に発生する水しぶきは落下する物の大きさ、形、表面状態に依存します。この課題では、大きさ、形の効果はおいておき、形、大きさが同じ場合に何が水しぶきの大きさを決めるのか考えてもらいました。

この現象を解明した論文が *nature physics* という科学誌の2007年3月号に掲載されました。この論文でフランス、クロードベルナルリヨン第一大学のデュエツ博士ら (CYRIL DUEZ, CHRISTOPHE YBERT, CHRISTOPHE CLANET AND LYDERIC BOCQUE) は水面に球体が着水する瞬間をハイスピードカメラで撮影し、発生する音も録音しました (図2)。

その結果、球体は水に入ると水を押し分け、水中に空洞を作る、その空洞がつぶれるときに大きなはね返りが生じることを見出しました。そのため、球体と同じ大きさ、同じ速さで落ちるときには、球体がどれだけ水中に空気を引き込むかによって水しぶきの大きさが決まります。

では、何が水中に引き込む空気の量を決めるか？彼らは球面の「濡れ」という性質に注目しました。つまり、球体表面がどのくらい親水性か撥水性かによると考えました。

そこで、「濡れ」の程度の変化により、水中に空気の空洞ができる最小速度がどのように変化するかを測定しました。それにより、親水性の場合は最小速度は「濡れ」の程度にはよらず、撥水性の場合は撥水性が強くなるにしたがって最小速度は減少することを発見しました (図3)。

また、その最小速度は液体の摩擦と表面張力の比、(摩擦)/(表面張力)に比例することも見出しました。親水性の球と撥水性の球が水に落下する様子の変化は図4のようになります。

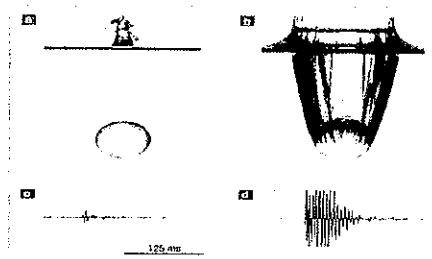


Figure 1 Visual and audio recordings of impact. a, b, Photographs of the impact of two spheres differing only in wettability by a nonometric coating on their surface: Impact of a perfectly wetting sphere, with static contact angle $\theta_s \approx 15^\circ$ (a); Impact of a hydrophobic sphere with static contact angle $\theta_s \approx 100^\circ$ (b). The impact velocity was 5.0 m s^{-1} in both cases, corresponding to a 1.25 m height drop. The photographs were taken 15.5 ms (a) and 15.0 ms (b) after initial impact. c, d, Time-resolved audio recordings of the impacts, as measured by a microphone ~ 10 cm from the impact point, for a hydrophilic (c) and a hydrophobic (d) sphere. The signal is proportional to the acoustic pressure emitted during the impact. The ticks on the vertical scale are arbitrary (but identical). A big “click” is evident for the hydrophobic sphere, whereas a tiny “click” is heard for the hydrophilic sphere. The sound is associated with the rapid closure of the cavity (not shown).

図 2:

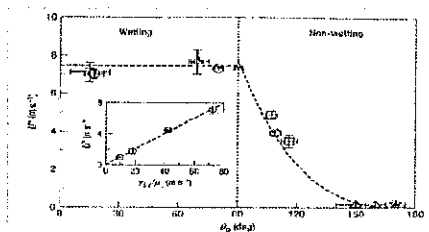


Figure 2 Threshold velocity U^* for air entrainment as a function of (advancing) static contact angle θ_s of the impacting body. The dashed lines are the theoretical predictions based on relations (1) and (2). The shaded area is the splash domain. The different symbols correspond to different bead diameters—square: 25.4 mm (glass); down-triangle: 20 mm (alumina); circle: 15 mm (glass, steel); up-triangle: 7 mm (alumina, steel). The beads are covered with various coatings to modify their wettability (see the Methods section). To focus on wettability as the only surface parameter, only smooth objects have been considered in the present study (see the Methods section). Inset: Dependence of the threshold velocity for a wetting glass sphere (25.4 mm) on the ratio γ_w/μ_w . We used various liquids to explore this dependence: water, isopropanol, ethanol and a water-glycerol mixture (20 wt% of glycerol). For these liquids, the contact angle on the sphere's surface was always below 10° . The dashed line is a linear prediction $U^* = \xi \gamma_w/\mu_w$ (with $\xi \approx 0.1$).

図 3:

(図 2,3,4 は全て, Cyril DUEZ, Christophe YBERT, Christophe CLANET, and Lyderic BOCQUE : “Making a splash with water repellency”, nature physics, VOL 31, March, 2007, pp. 180-183 より引用)

講評

提出された解答は大きさ、形を変えた実験を行ったものが多く見受けられました。課題をよく読んでいなかったのかもしれませんが。

その他、入射角度を変化させたものも見られました。その効果も興味深いものですが、いきなり難しい現象を理解しようとせず、よりシンプルな状況から理解して次第に複雑にしていくことが肝心です。

この何気ない現象を科学的に記述するには系統的な測定が必要です。その現象においてどのようなパラメータ (変数) が重要かを見抜いて、それらの変化により現象がどのように変化していくかを以下に

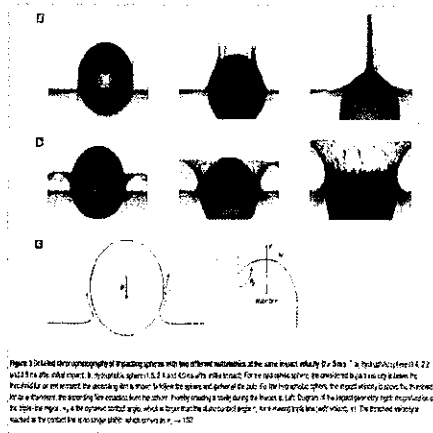


図 4:

系統だって観測，測定することが必要です。実験器具の制約もあるのである程度は仕方ありませんが，残念ながら実験結果が系統的に整理されていた例は少なかったように思われます。

実験を行う場合には，何に興味を持ち，どのようなパラメータを変化させ，何を測定すればどのような現象が期待できるのか，事前に実験の計画と立てるよう心がけてください。

3 課題3

課題

昔話や神話の中には、現代の技術でも実現できないような荒唐無稽な装置が語られていることがあります。かつては夢物語と考えられていましたが、考古学の成果により、過去には現在と違った意味での科学技術が存在していたことも知られています。とはいえ科学技術ですから物理法則に反することはできません。さて、千夜一夜物語の中に「アリババと40人の盗賊」という有名な話があります。この話の中には「開け胡麻」を合図に開く洞窟の入り口の岩戸がでできます。現代に置き換えれば、さしずめ「音声認識による自動開閉装置」でしょうか。千夜一夜物語は、中世イスラム世界でその原型が出来上がったといわれています（アリババと40人の盗賊に関しては20世紀初頭にヨーロッパで翻訳が出版される時に創作されて付け加えられたとする説もあります。）。今のところ、中世イスラム世界には、現在の意味での商用電気技術や、電子式のコンピュータはなかったようです。そこで、電気で動くモーターなどに頼ることのない、「自動扉の開閉装置」の原理を考えてください。また、「音声認識による扉開閉装置」も考えてください。

解説

現在の情報化社会には電気は欠く事のできないエネルギーの供給手段です。自然の力、地下資源を燃やした熱から発電機によって、エネルギー変換として電気は作りだされます。電気の特徴は、エネルギーの輸送や消費元への供給が自在にできことがまず挙げられます。また、消費元での電気の制御も抵抗を利用すれば容易にできます。しかし、風力発電の風は輸送できません。火力発電や原子力発電の熱源となる鉱物から、今のところを直接に電気を作ることはできません。熱による蒸気で発電機を回転させて電気を発電しています。蓄電池、燃料電池として持ち運びのできる電気発生装置も存在します。

さて、発電送電技術が発明される前にも、現在では電気で動く機械を、電気以外で動かしていました。もっとも身近な例は、蒸気機関車から電気機関車への変遷の歴史があります。また、水車や風車によって水や風のエネルギーを直接力学運動に変換していました。

人間の技術史上取り上げられた、動力源として、重力、水力、風力、火力、人力、動物の力、などを挙げることをできます。ここでいう火力はただ火を燃やすだけのことを指します。重力には、錘を落とすことや、砂を流すことも含まれます。ただし、砂は工学的には粉体といい、固体でもない、流体でもない性質を示すことがあります。アラビアの岩山で、自動扉を開けることを考えると、これら、重力、水力、風力、火力、人力、動物の力、を自在に組み合わせることが考えられます。

紀元前2世紀に、ヘロンの作った、自動聖水販売機が存在したと伝えられています。これは、コインの重さで一定時間水が流れる装置です。また、中世イスラム黄金時代（8世紀-12世紀）アルティク朝メソポタミアの学者 Ibn Ismail ibn al-Razzaz al-Jazari (1136-1206)（通称 al-Jazari）は水力の揚水装置を考案しています。さらに、アンティキティラ島の機械といわれる紀元前150-100年にギリシャ人によって作られた歯車仕掛けの天体運動計算器が知られています。このように、過去には現代違った動力原理に基づく装置が存在しました。

講評

やはり、力学的な鹿仕掛けを考えた解答が多数ありました。設計図として評価したのは、実現可能かどうかを考慮しました。その中で特に評価したのは、実際に模型を作った解答です。過去から伝わっている装置や、工法、実際に作成復元し、動作や強度を実証する分野を、実験考古学といいます。そこで、実験考古学的な立場を評価しました。また、磁力は古くから、不思議な力として知られています。扉の開け閉めに磁石を利用する場合には、磁力線を制御する工学的な仕掛けが必要です。現在は、磁力を電磁石として制御できます。しかし、ただ一人、磁石を利用することに着目したことを評価しました。

磁力は古くから知られており、科学史上でもっとも重要な応用は羅針盤です。2004年には、常温で磁力を持つプラスチック磁石が発見されています。

4 課題 4

課題

平面上に書かれた正三角を用意します。この正三角形の各頂点に1から9までの数字と空白をランダムに書きます。すると文字の組合せと配置とが異なる多数の多角形ができます。このとき、異なる文字配置がいくつできるでしょうか。たとえば、正三角形の場合は、文字の書かれていない三角形が1種類、1文字の三角形が9種類、さらに、文字2種類と文字3種類の三角形があります。正六角形の場合の異なる配置はどれだけあるでしょうか。また、平行四辺形の、菱形、正四面体、正方形などの頂点に数字を割り振る場合も考えてください。さらに、多角形ではなく、多面体、たとえば 正四面体や、立方体の場合にはどんな性質が成り立つでしょうか。導いた法則を元に、次のことを考えてください。このような「問題そのもの」を一般化するとどのような問題になりますか。つまり、上に述べた問題をもっと一般的に記述した問題はどのような問題になりますか。特別な場合に上に述べた問題を含むような、「問題」を作ってください。

解説

この世に存在するも物体は形を持っています。その形に色が付いていたり、形の一部分だけ性質が異なっていたりします。同じ形を持っているのに、性質が異なる物体がどれだけあるか数え上げることが抽象化した問題です。高分子化学では、「…異性体」と呼ばれます。化学式が同じでも、構造式が異なれば毒物になるものが多数あります。また、人工的に合成すると、全ての異性体が均等にできてしまうのに、生体の中ではある異性体だけが存在している物質もあります。現在では、創薬あるいは薬剤設計といって、計算で薬を作ることが行われます。薬が生体内部で効力を発揮するのは、組み木パズルに似ています。すなわち、ある種のウィルスへの薬効は、ウィルスの表面の毒素を持った突起に、薬剤が覆いかぶさり、毒素の効果を抑ええることで説明できます。化学的な性質だけでなく、幾何学的情報も利用されています。この作用は、辺や頂点に文字の書かれた2つの多角形同士の凸凹を、相補するようにドッキングさせる処理に似ています。ドッキングを利用して薬効を予測するには、幾何形状を調べるだけでなく、特定の物質が、特定の辺に付随した多角形の性質を調べる必要があります。また、DNAは二重螺旋ですが、ATCGで記述さえ得る核酸が特定の規則で並んだ紐です。さらに、たんぱく質は、20数種類の物質が並んだ紐が、糸玉のような物質です。分子をばらばらした状態で計測される質量分析結果から、遺伝子、染色体や、たんぱく質の3次元構造を推定復元するためには、結び玉のある紐のたまに記号を割り振ったときに、特定の性質を持った紐ができるかどうかを判定して行われます。このように、多角形や多面体、紐や輪に記号を割り振った場合の可能な個数を調べる問題が、その生化学的性質を調べる手順の重要第一歩となります。

講評

何を問われているのか、よく分からなかったようです。解説で述べたように、元の問題はゲームの問題のようですが、実は遺伝子解析や薬剤設計の基礎なす数学のさらに基礎となる問題です。21世紀後半は、病気の予防や、外科によらない治療として、患者個人個人の遺伝子に基づいた治療が主流になるといわれています。現在の日本の高等学校や中学校の数学であまり取り扱われる題材ではありません。しかし、数学とし生物学や医学への応用が広く、微分積分などと同様に純粋数学でも応用数学でも重要な学問分野です。