

ドミノ倒しの進行速度について

1、始めに

ドミノを倒してから十分に時間が経過した後の定常状態の牌の動きの基本的な考え方は次の通りである。

牌は ω_0 で倒れ始め倒れる途中で重力により加速し、衝突時には ω_1 になる。後ろの牌は角速度 ω_1 で前の牌に衝突した後、前の牌は再び元の牌と同じ ω_0 で倒れ始める。牌が倒れ始めてから衝突するまでを1サイクルと考え、その間の変化を数値的に解く事で1サイクルに要する経過時間を求め、速度を計算する。

このように考えてエクセル VBA でプログラムを作成したところ実際に実験によって得られた結果（岐阜県立恵那高校、平成 24 年度 SSH 発表資料）と概ね一致することが分かった。

運動量伝達係数 b を微妙に変化させるとグラフの形が大きく変わる。 $b=0.98$ にすると概ね実験結果と一致することから、牌同士の衝突はほぼ完全弾性衝突になるものと思われる。

問題点は、牌の厚さによる影響や衝突した後の後ろの牌が前の牌に与える影響を無視している点である。

衝突後の後ろの牌の影響を無視しても、実験によって得られた結果と概ね一致するのはなぜか、疑問が残る。

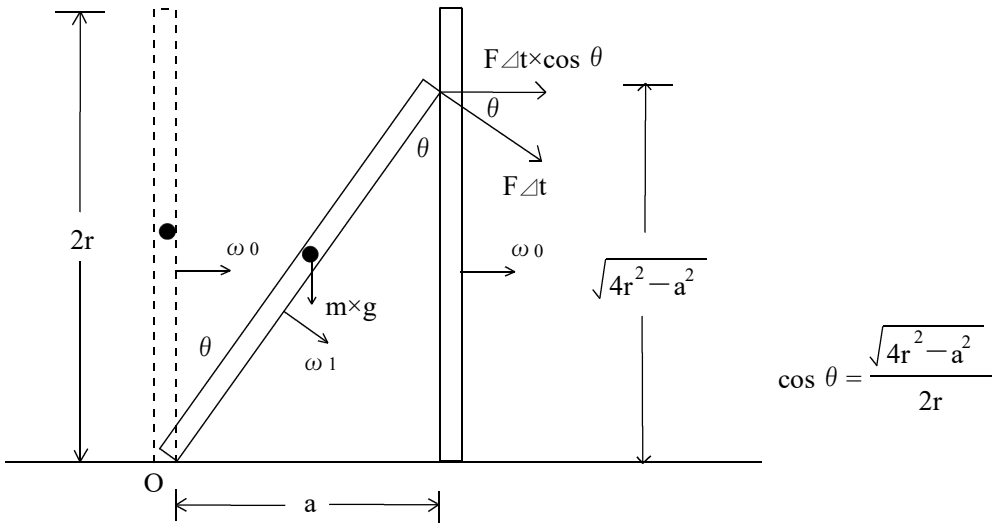
高校生の皆さんにはこれらの影響を考慮した精度の高いシミュレーションプログラムを開発するように期待します。

岐阜県立恵那高校、平成 24 年度 SSH 発表資料を引用させていただきました。有難うございました。

シミュレーションプログラムは下記 URL よりダウンロードできます。

<http://www.cfs.chiba-u.jp/koudai-renkei/information/files/domino.xlsx>

2、基本的な考え方



$$I = \frac{4}{3} \times m \times r^2 \quad \text{Oの回りの慣性モーメント}$$

$I \times \omega_1 \times \cos \theta \times b = I \times \omega_0$ 力積の水平成分が伝わると仮定する
 b は運動量の伝達係数とする

$$\omega_1 \times \cos \theta \times b = \omega_0 \quad \text{----- ①}$$

$$\frac{1}{2} \times I \times \omega_0^2 + m \times g \times r \times (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \times I \times \omega_1^2 \quad \text{----- ②} \quad \text{エネルギー保存則より}$$

①②より

$$\omega_0^2 = \frac{-3g \times (1 - \cos \theta)}{2r} \quad \text{----- ③}$$

$$1 - \frac{4r^2}{4r^2 - a^2} \times \frac{1}{b^2}$$

$$I \times \frac{d^2 \theta}{dt^2} = m \times g \times r \times \sin \theta - k \times \frac{d \theta}{dt} \quad \text{----- ④} \quad \text{運動方程式より}$$

k は ω に比例する空気抵抗とする

$$\frac{d \theta}{dt} = \omega \quad \text{とすると}$$

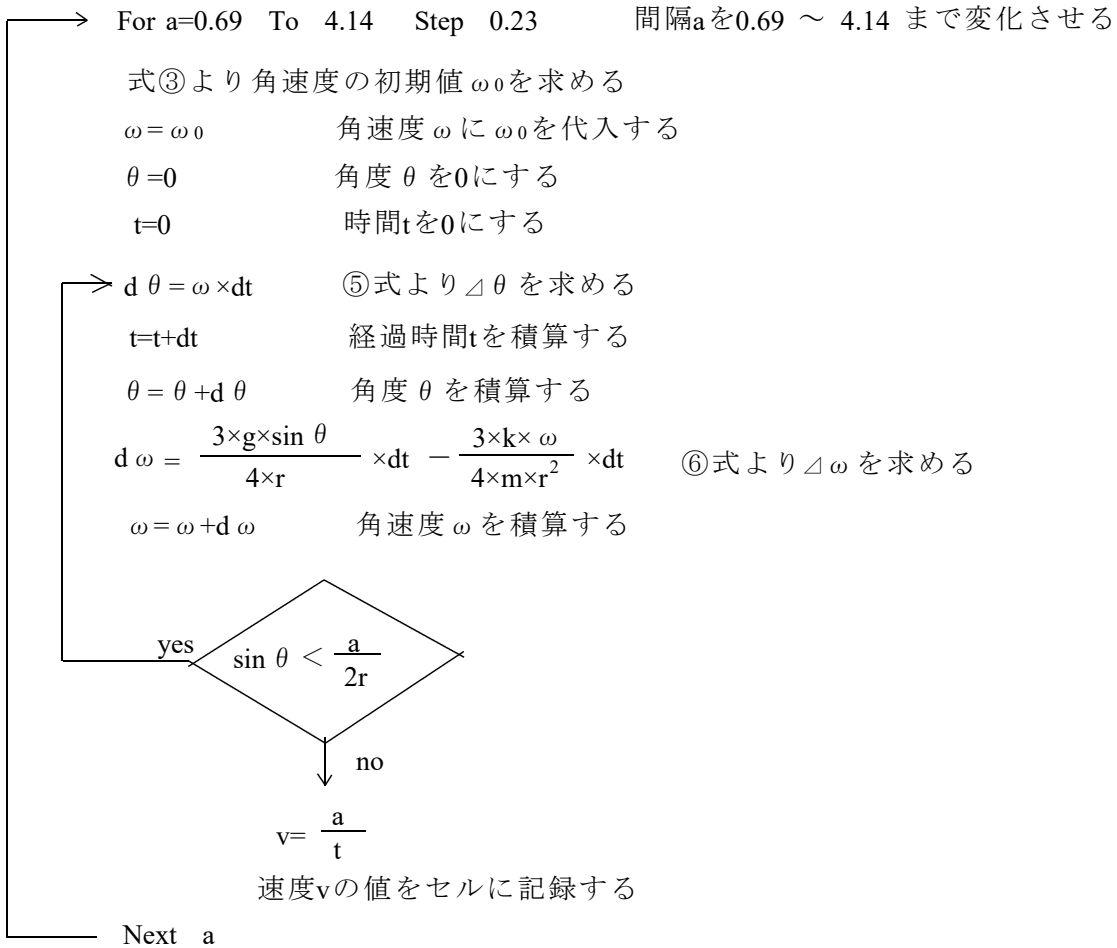
$$\frac{d \omega}{dt} = \frac{3 \times g \times \sin \theta}{4 \times r} - \frac{3 \times k \times \omega}{4 \times m \times r^2}$$

$$d \theta = \omega \times dt \quad \text{----- ⑤}$$

$$d \omega = \frac{3 \times g \times \sin \theta}{4 \times r} \times dt - \frac{3 \times k \times \omega}{4 \times m \times r^2} \times dt \quad \text{----- ⑥}$$

3、エクセル VBA によるプログラム

r=2.3 牌の高さの1/2
 b=0.98 運動量伝達係数
 k=1 空気の抵抗係数
 m=10 質量
 dt=0.0001 Δtを設定する



Sub asdf()

r = 2.3 '牌の高さの 1/2

b = 0.98 '運動量伝達係数

k = 1 '抵抗係数

m = 10 '質量

dt = 0.0001 '△ t

j = 2

For a = 0.3 * r To 1.9 * r Step 0.1 * r '牌の間隔

f = Sqr(4 * r ^ 2 - a ^ 2) / (2 * r) '倒れた時の cos(θ)

d0 = Sqr(-3 * 980 * (1 - f) / (2 * r) / (1 - (4 * r ^ 2 / ((4 * r ^ 2 - a ^ 2) * b ^ 2)))) 'ω 0

d = d0 'ω

c = 0 'θ

t = 0 't

ttt:

dc = d * dt '△ θ

t = t + dt

c = c + dc

dd = 3 * 980 * Sin(c) / (4 * r) * dt - 3 * k * d / (4 * m * r ^ 2) * dt '△ ω

d = d + dd

If Sin(c) < a / (2 * r) Then GoTo ttt

v = a / t '速度

Cells(j, 1) = a '牌の間隔

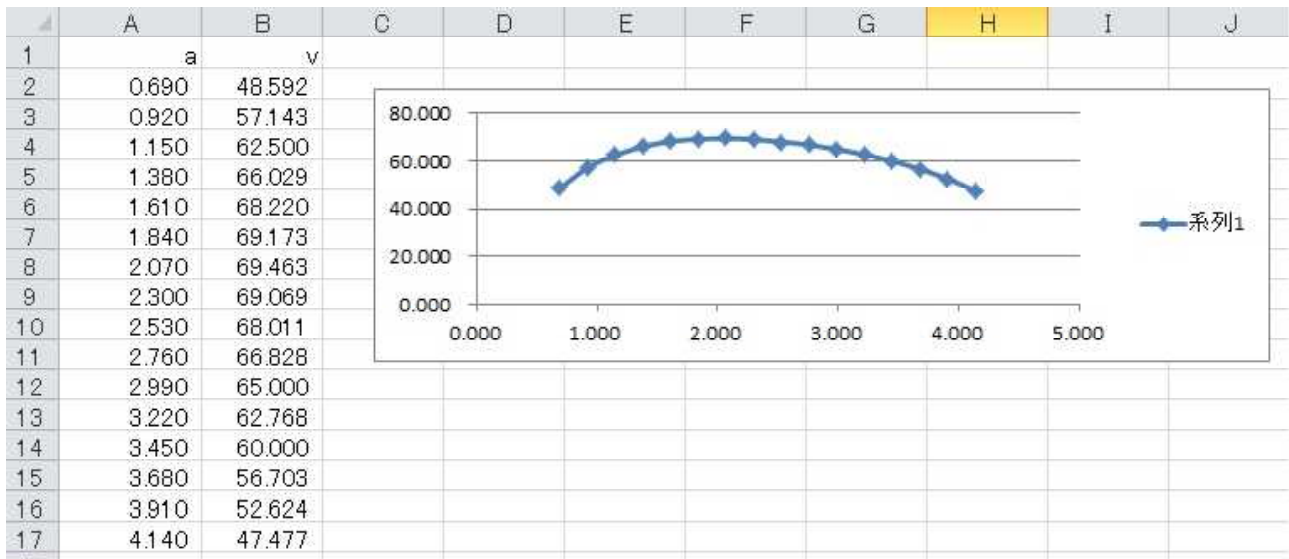
Cells(j, 2) = v '速度

j = j + 1

Next a

End Sub

4、エクセルによるシミュレーション結果



5、岐阜県立恵那高校、平成 24 年度 SSH 発表資料

<http://school.gifu-net.ed.jp/ena-hs/ssh/H24ssh/sc3/31211.pdf>

1.5 cm から 2.0 cm まで 0.1 cm ずつ間隔を買えてタイムを計測する。

〈結果3〉

表3. 時間と速さの関係(3)

間隔	個数	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	平均	速さ (cm/秒)
1.5 cm	44 個	1.358(秒)	1.293	1.305	1.330	1.321	75.700
1.6 cm	42 個	1.250(秒)	1.228	1.223	1.235	1.234	81.037
1.7 cm	40 個	1.273(秒)	1.188	1.270	1.243	1.243	80.451
1.8 cm	39 個	1.290(秒)	1.250	1.295	1.280	1.279	78.186
1.9 cm	37 個	1.340(秒)	1.273	1.260	1.263	1.284	77.882
2.0 cm	36 個	1.318(秒)	1.328	1.293	1.310	1.312	76.220

グラフ 1. 時間と速さの関係(3)

