

飛び入学 の物理Ⅳ

千葉大学先進科学センター編



飛び入学の物理

千葉大学先進科学センター編

「飛び入学の物理」は、千葉大学が毎年12月に実施している先進科学プログラム（飛び入学）の問題と解答を編纂した本です。物理オリンピックと同じく、教科書や参考書を見ながら解く、「考える力」を試す問題となっています。易しくはありませんが、各小問をひとつずつ根気よく解いてゆけば正解にたどり着くことができ、物理学の醍醐味を味わえるようになっています。

飛び入学の物理Ⅳ

内容：令和2年度から令和7年度までの選考課題及び解答例

飛び入学の物理Ⅲ（続・飛び入学の物理）

内容：平成27年度から平成31年度までの選考課題及び解答例

飛び入学の物理Ⅱ（飛び入学の物理）

内容：平成21年度から平成27年度までの選考課題及び解答例

飛び入学の物理Ⅰ（千葉大学飛び入学試験問題）

内容：平成10年度から平成20年度までの選考課題及び解答例

本シリーズⅡ～ⅣのコンテンツはWebサイトで公開しております。また資料請求にてお取り寄せいただけるものもあります。詳しくは以下のWebサイトをご覧ください。

千葉大学先進科学センター刊行物

<https://www.cfs.chiba-u.ac.jp/outline/publication.html>



飛 び 入 学 の 物 理 IV

千葉大学先進科学センター編

はじめに

本書は千葉大学理学部物理学科および工学部物質科学コースに飛び入学を希望する受験生を対象とした過去問題と出題者による解説を掲載しています。本書に収録されている令和2年度より以前の問題と解説は、「千葉大学飛び入学試験問題」（日本評論社 2008 年刊）、「飛び入学の物理」（千葉大学 2015 年刊）、「続・飛び入学の物理」（千葉大学 2019 年刊）として公刊しています。これらの続編（第4集）であるという意味を込め、表題を「飛び入学の物理 IV」にしました。

ここに収められている問題には二つの大きな特色があります。第1に教科書や参考書などの閲覧が自由であることです。受験生は必要と思われる本を持ち込むこともできますし、千葉大学が用意した教科書や辞典などを参照することもできます。禁止されているのは、外部との通信やインターネットでの検索、他の受験生との相談です。第2に試験時間がとても長いことです。現在は2題の問題を12:30 から17:30 までの5時間が与えられています。長い時間なので途中でお茶やお菓子をとって休憩することも認められています。問題Ⅰは力学に関するもので、問題Ⅱは電磁気学、熱、波動といった力学以外に関するものです。問題の題材は、長時間考える意欲が沸くよう工夫しています。一方で、高校で習う物理や数学の知識を応用すれば、正解が見えてくるように、設問が準備されています。出題者は、面接試験の受験生から、面白い問題だったと褒めてもらうことを楽しみに作題しています。また物理の面白さを分かる高校生に飛び入学してもらいたいと考えています。知識や記憶ではなく、「考える力」を問う問題として、飛び入学を目指す方に限らず、物理を愛好する高校生の皆さんに楽しんでいただけたら幸いです。

1998 年に物理を学ぶ者を対象として開始した飛び入学ですが、現在は6学部の14分野で実施しています。分野ごとに、前期日程試験や総合型選抜、国際オリンピックの国内予選での成績、高校在学中の研究成果などを評価に取り入れた入学者選抜を工夫しています。複数の選抜方式を並列して実施している学科もあります。これらの詳細については、千葉大学先進科学センター (<https://www.cfs.chiba-u.ac.jp>) を参照いただくようお願いします。

末尾になりましたが、本書に掲載した問題の作成にあたり、関係する各位にご協力をいただいていることをここに記し感謝を申し上げます。大学入試では類を見ない問題を作成するにあたり、大変有益なご指摘や助言をいただきました。

2025 年 2 月

千葉大学先進科学センター長
加納 博文

目次

はじめに	1
令和7年度選抜課題	5
令和7年度選抜課題解答例	15
令和6年度選考課題	31
令和6年度選考課題解答例	43
令和5年度選考課題	59
令和5年度選考課題解答例	69
令和4年度選考課題	87
令和4年度選考課題解答例	99
令和3年度選考課題	115
令和3年度選考課題解答例	123
令和2年度選考課題	139
令和2年度選考課題解答例	151

令和7年度
千葉大学先進科学プログラム入学者選抜課題

課題論述（物理学）

課題I, II

(12:30～17:30)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題I および課題II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

質量 m の小球を使って剛体を運動させることを考えよう。この問題では図 1 のように辺の長さが R の正方形から、半径が R で中心角が $\frac{\pi}{2}$ の扇型を切りとった断面の形状をもつ剛体 A を考える。剛体 A の厚みは w で密度 ρ は一様である。以下の問いに答えなさい。

最初は剛体 A が図 1 のように水平面に固定されている場合を考える。水平面も剛体の円弧面もなめらかで摩擦は考えなくて良い。小球は $z = 0$ の面内を運動するとして xy 方向の運動だけを考える。水平方向を x 軸、鉛直上方を y 軸正の向きにとり、重力加速度の大きさを g とする。小球は図 1 の左から速度 $(v_x, v_y) = (v_0, 0)$ で点 O まで水平面を運動したのち、円弧面をのぼり始める。小球が円弧上にある間の位置は、小球と円弧の中心を結ぶ線が鉛直方向となす角度 θ を使って定めることができる。次の設問に答えなさい。

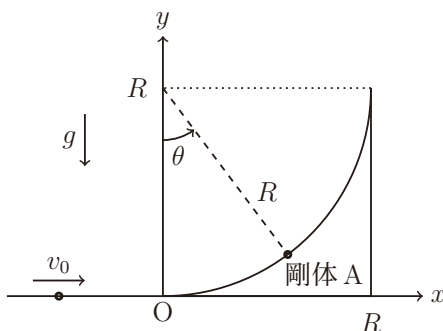


図 1

問 1 円弧面上にある小球の位置は $(x, y) = (R \sin \theta, R - R \cos \theta)$ と表される。速度は単位時間あたりの変位なので、位置座標を時刻 t で微分したものに他ならない。円弧上にある小球の速度 (v_x, v_y) を $R, \theta, \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ を用いて表しなさい。

問 2 小球の力学的エネルギーが保存することを利用し、 $\dot{\theta}$ を g と R, v_0, θ を用いて表しなさい。

問 3 円弧上を速さ v で運動する質量 m の小球の向心力の大きさは $m \frac{v^2}{R}$ と表せることを使って、小球に働いている力 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ を m, g, R, v_0, θ を用いて表しなさい。

次に水平面がなめらかで剛体 A が摩擦なく水平に動ける場合を考える。図 2 に示すように剛体 A の左端の x 座標 X 、小球の円弧上での位置を表す角度 θ を使って、次の問いに答えなさい。小球が剛体 A と接触する前の速さは、小球が v_0 、剛体 A が 0 である。

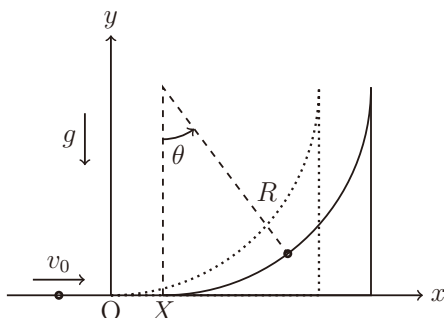


図 2

- 問 4 小球の座標 (x, y) を X, R, θ を用いて表しなさい。
- 問 5 小球の質量を m 、剛体 A の質量を M として、接触中のそれぞれの運動量を $M, m, R, X, \dot{X} = \frac{dX}{dt}, \theta, \dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。
- 問 6 接触の前と接触中で小球と剛体の力学的エネルギーの和が保存していることを示す式を $M, m, R, \dot{X}, \theta, \dot{\theta}, v_0$ を使って表しなさい。
- 問 7 小球が左から剛体 A の円弧上をのぼり、先端 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ に到達したのち、円弧から離れることなく円弧上を下り x 軸上を左側へと離れて行った。このときの小球が剛体 A の左から近づくときの速度 v_0 を m, M, R, g を使って表しなさい。
- 問 8 問 7 の条件で 小球が (a) 円弧上に乗った直後 $(0 < \theta \ll 1)$, (b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ をのぼっているとき, (c) 先端 $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ に到達したとき, (d) $\theta = \frac{\pi}{3}$ を下っているとき, (e) 剛体 A から離れる直前のそれぞれについて、剛体 A の速度 $\dot{X}$ を v_0, m, M を使って表しなさい。(注意: 答えは重力加速度 g を用いずに表すことができる。)

(次ページに続く)

今度は図3に示すように、剛体Aが点Jを支点として回転できるよう、ちょうつがい（ちょうつがい）で固定した場合を考えよう。前問までと同様に小球は左から速度 v_0 で点Oに到達する。従って、剛体Aが傾き始める直前までは問1から問3で求めた結果をそのまま利用することができる。問9から問12までは剛体はまだ傾いていないとして以下の設問に答えなさい。

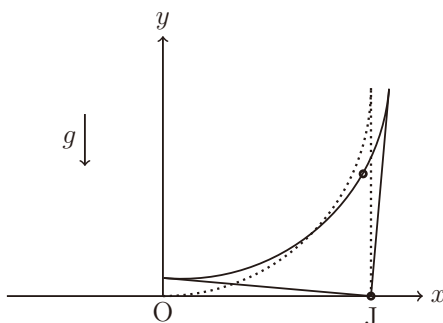


図3

問9 剛体Aの質量 M を ρ , R と w を使って表しなさい。

—— コラム「重心」 ——

物体を大きさが無視できる $i = 1$ から n の小部分に分解して考えよう。それぞれの位置座標を (x_i, y_i) 、質量を m_i とすると、この物体の質量は

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$$

重心の座標は

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n x_i m_i, \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

と表される。従って、剛体Aを y 軸に平行な線により細かく分割して和をとると、重心の x 座標は定積分

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^R x \rho w \left(R - \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx$$

によって表すことができる。図形の対称性より重心の y 座標は

$$y_G = R - x_G$$

であることが分かる。

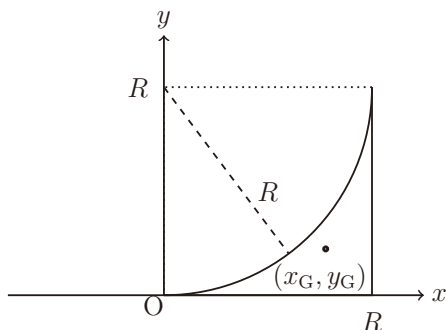


図 4

問 10 コラム「重心」を読み，剛体 A の重心の座標 (x_G, y_G) を R を使って表しなさい。答えは図 4 のデカルト座標系 (x, y) を用いること。

問 11 剛体 A に働いている複数の力のそれぞれについて，力の種類を述べなさい。またその内で大きさや向きが分かるものについては，力の x 成分， y 成分を求めなさい。

問 12 小球が図 1 の θ の位置にあり，剛体 A が静止している場合を考える。このとき水平面の垂直抗力による，点 J のまわりに剛体 A を回転させる力のモーメントを求めなさい。

問 12 で求めた力のモーメントは，剛体 A が傾く直前まで有効である。

問 13 問 12 の結果を用いて，剛体 A が傾き始める条件を求めなさい。剛体 A がわずかに傾いたあとすぐに元の位置に戻る場合も「傾き始めた」とみなしなさい。

問 14 ここまでの結果を用いて次の問いに答えなさい。

(a) 剛体 A が傾き始めるのは $\theta > \frac{\pi}{4}$ に限られることを示しなさい。

(b) $v_0^2 = 2gR$ のとき (剛体 A が傾かなければ小球が先端で折り返してくるとき)，剛体 A を傾ける方向の力のモーメントがどのように変化するか論じなさい。

[II]

図1のように電気容量 C のコンデンサーと抵抗値 R の抵抗が電源と直列につながれた回路を考える。電源の電圧 $E(t)$ は任意に制御することができる。ただし、 $E(t)$ は点 O を基準とした点 A の電位とする。

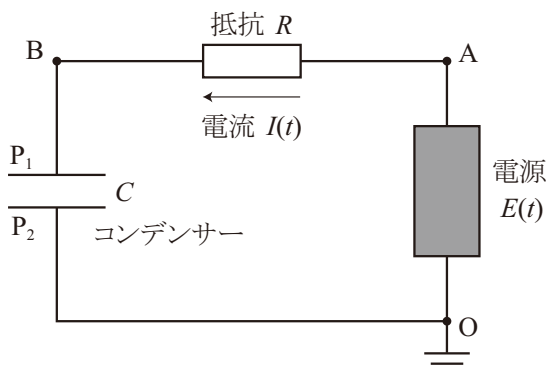


図 1

なお、必要なら以下の不等式は証明せずに用いてよい。

任意の正の実数 x に対して

$$e^x > 1 + x$$

$$e^{-x} > 1 - x$$

$$\frac{1 - e^x}{1 + e^x} > -\frac{x}{2}$$

$$\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} < \frac{x}{2}$$

問 1 電源の電圧を $E(t) = E_0$ (E_0 は正の定数) となるよう設定し、電圧を加えてから十分時間がたった後の状態を考える。

- (a) コンデンサーの極板 P_1 に蓄えられた電荷の量を答えなさい。
- (b) コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの大きさを答えなさい。
- (c) 抵抗で発生する単位時間あたりのジュール熱を答えなさい。

問2 電源の電圧が時刻 t の関数として $E(t)$ と表される時間変化をする場合を考える。時刻 t においてコンデンサーの極板 P_1 に蓄えられた電荷の量を $q(t)$ とおく。

(a) 時刻 t におけるコンデンサーの両端の電圧 $V(t)$ を求めなさい。コンデンサーの両端の電圧は、点 O を基準とした点 B の電位で表すこと。

(b) 時刻 t において回路に流れる電流を $I(t)$ とおく。図1の $A \rightarrow B$ の向きを電流 $I(t)$ の正の向きと定義すると、コンデンサーに流れ込む電流が単位時間あたりの $q(t)$ の増加量となることから、 $\frac{dq(t)}{dt} = I(t)$ が成立する。これを用いると

$$\frac{dq(t)}{dt} + k_1 q(t) = k_2 E(t) \quad (1)$$

の式を導くことができる。 k_1 , k_2 をそれぞれ C および R のうち必要なものを用いて表しなさい。

問3 問2(b) で得られた式 (1) を用いて、 $E(t)$ が与えられたときの $q(t)$ を計算しよう。式 (1) は

$$\frac{d}{dt} (q(t)e^{k_1 t}) = k_2 E(t)e^{k_1 t} \quad (2)$$

と変形できることを、上式の左辺を具体的に微分することにより示しなさい。この問いに限り、 k_1 , k_2 を用いて答えてもよい。

(次ページに続く)

問4 問3の結果を用いると、式(2)の t を τ でおきなおした式

$$\frac{d}{d\tau} (q(\tau)e^{k_1\tau}) = k_2 E(\tau)e^{k_1\tau} \quad (3)$$

の両辺を τ で積分することで、与えられた $E(t)$ に対する $q(t)$ を求めることができる。時刻 $t = 0$ に電源の電圧を $E(t) = 0$ から $E(t) = E_0$ (E_0 は正の定数)に瞬間的に変化させた。 $t = 0$ ではコンデンサーに電荷は蓄えられていなかった。つまり、 $q(0) = 0$ であった。

- (a) 式(3)を $\tau = 0$ から $\tau = t$ まで τ で積分することで、時刻 t ($t \geq 0$)における $q(t)$ を求め、そのおおよその形をグラフに描きなさい。
- (b) 時刻 t ($t \geq 0$)における $I(t)$ を求め、そのおおよその形をグラフに描きなさい。
- (c) 時刻 t ($t \geq 0$)において、抵抗で発生する単位時間あたりのジュール熱 $P(t)$ を求めなさい。
- (d) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T$ までに抵抗で発生したジュール熱 $Q(T)$ は $P(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで積分して得られる。 $Q(T)$ を求め、さらに、極限值 $Q_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} Q(T)$ を求めなさい。
- (e) 電源がする単位時間あたりの仕事は $I(t)E(t)$ で与えられるので、電源が $t = 0$ から $t = T$ までにした仕事 $W(T)$ は $I(t)E(t)$ を $t = 0$ から $t = T$ まで積分して得られる。 $W(T)$ を求め、さらに、極限值 $W_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} W(T)$ を求めなさい。
- (f) 電源がした仕事のうち、ジュール熱となった割合 $\frac{Q_\infty}{W_\infty}$ を求めなさい。
- (g) ここまでの結果を用い、時刻 $t = 0$ で電圧を0から E_0 に瞬間的に変化させて以降、十分に時間がたつまでの間に、何のエネルギーがどのように使われたかを簡単に答えなさい。

問5 電源の電圧をうまく制御して、どうすればコンデンサーの充電の際に発生するジュール熱を小さくすることができるかを考えよう。 $t < 0$ において、 $E(t) = 0$ であり、コンデンサーに電荷は蓄えられていなかった。 $0 \leq t \leq T_0$ の間、電源の電圧 $E(t)$ を一次関数 $E(t) = a \frac{t}{CR} + b$ (a, b は正の定数) に従うように単調に増加させた。まず、このときの回路の様子を計算で求めよう。

- (a) 時刻 t ($0 \leq t \leq T_0$) における $q(t)$ を求めなさい。
- (b) 時刻 t ($0 \leq t \leq T_0$) における $I(t)$ を求めなさい。
- (c) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T_0$ までに抵抗で発生したジュール熱 Q を求めなさい。

時刻 $t = T_0$ において、コンデンサーには q_0 (q_0 は正の定数) の電荷が蓄えられていた。すなわち、 $q(T_0) = q_0$ であったとする。このとき、どのように a と b を定めれば抵抗で発生するジュール熱を小さくできるかを次の手順を踏んで考えよう。

- (d) $q(T_0) = q_0$ となることを考慮して、 b を a, q_0, C, R, T_0 を用いて表しなさい。
- (e) (d) で得られた b を、(c) で得られた発生したジュール熱 Q の式に代入すると、 Q は a の関数となる。 Q の最小値 $Q_{\min}$ 、および Q が最小値をとるときの a の値を求めなさい。また、この a に対応する b の値も求めなさい。
- (f) Q が最小値 $Q_{\min}$ をとるとき、時刻 t ($0 \leq t \leq T_0$) におけるコンデンサーの両端の電圧 $V(t)$ を求めなさい。
- (g) Q が最小値 $Q_{\min}$ をとるとき、 $t = 0$ から $t = T_0$ の間に電源がした仕事 $W_{\min}$ に対して、発生したジュール熱 $Q_{\min}$ の割合 $\frac{Q_{\min}}{W_{\min}}$ を求めなさい。また、 $\frac{Q_{\min}}{W_{\min}}$ を T_0 の関数として、グラフのおおよその形を描きなさい。

令和7年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選抜課題

課題論述（物理学）

課題I, II 解答例

R7
解答例

解答例：課題I

出題の意図

力学的なエネルギーの保存，運動量の保存とその利用，および力のモーメントについての理解を確かめるとともに，微分積分の演算能力を確かめるための問題である。剛体の回転運動は高校での学習範囲外なので除いてある。

R7

解答例

問1 与えられた位置座標を微分することにより $v_x = R\dot{\theta} \cos \theta$, $v_y = R\dot{\theta} \sin \theta$ が得られる。

ちなみに速さは $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |R\dot{\theta}|$ である。

問2 力学的エネルギーの保存則により

$$\frac{m}{2}(R\dot{\theta})^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{m}{2}v_0^2 \quad (1)$$

が得られる。これを整理すると

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{2g}{R} + \frac{2g}{R} \cos \theta \quad (2)$$

が得られる。従って

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{2g}{R} + \frac{2g}{R} \cos \theta} \quad (3)$$

である。

問3 小球には重力 $\vec{F}_G = (F_x, F_y) = (0, -mg)$ の他に剛体 A からの垂直抗力 $\vec{N}$ が半径方向に働いている。問題文に与えられているように向心力 (=半径方向の慣性力) の大きさは $m\frac{v^2}{R} = mR\dot{\theta}^2$ なので，半径方向の力の釣り合い

$$-N + mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 = 0 \quad (4)$$

より，垂直抗力の大きさ

$$N = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \quad (5)$$

$$= m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_0^2}{R} \right) \quad (6)$$

を求めることができる。向きを考えると

$$\vec{N} = N(-\sin \theta, \cos \theta) \quad (7)$$

$$= m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_0^2}{R} \right) (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (8)$$

が得られる。

従って、小球にはたらく力は

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{N} = (0, -mg) + m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_0^2}{R} \right) (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (9)$$

である。

(補足)

この設問では垂直抗力の大きさが与えられていたが、小球の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} \quad (10)$$

から垂直抗力を求めることもできる。小球の速度を時刻 t で微分して加速度 $\vec{a}$ を計算すると

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = R\ddot{\theta} \cos \theta - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (11)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\ddot{\theta} \sin \theta + R\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (12)$$

が得られる。これを式 (10) に代入すると

$$N = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \quad (13)$$

が得られる。同様に円弧に沿った小球の加速度も

$$\frac{d}{dt}v_\theta = R\ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (14)$$

も求めることができる。

問 4

$$(x, y) = (X + R \sin \theta, R - R \cos \theta) \quad (15)$$

問 5 小球の運動量は $(m\dot{X} + mR\dot{\theta} \cos \theta, mR\dot{\theta} \sin \theta)$ と表せる。また剛体 A の運動量は $(M\dot{X}, 0)$ と表せる。

問 6 小球と剛体 A の運動エネルギー、小球の重力エネルギーを考えると

$$\frac{m}{2} \left[\left(\dot{X} + R\dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{M}{2} \dot{X}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{m}{2} v_0^2 \quad (16)$$

が導かれる。

問7 全運動量の x 成分が保存することから

$$(m + M) \dot{X} + mR\dot{\theta} \cos \theta = mv_0 \quad (17)$$

が得られる。小球が $\theta = \frac{\pi}{2}$ にあるときは,

$$(m + M) \dot{X} = mv_0 \quad (18)$$

である。またエネルギー保存則に $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$ を代入すると

$$\frac{m + M}{2} \dot{X}^2 + mRg = \frac{m}{2} v_0^2 \quad (19)$$

が得られる。運動量保存則を使って $\dot{X}$ を消去すると

$$v_0^2 = \frac{2Rg(M + m)}{M} \quad (20)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Rg(M + m)}{M}} \quad (21)$$

が得られる。

問8 運動量保存則とエネルギー保存則を用いれば $\dot{X}$ と $\dot{\theta}$ を求めることができる。計算を容易にするために、 $\dot{X}$ を消去した式を導こう。式 (17) の両辺を自乗し、 $2(m + M)$ で割ると

$$\frac{m + M}{2} \dot{X}^2 + mR\dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{m + M} \right) R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta = \frac{m^2}{2(m + M)} v_0^2 \quad (22)$$

が得られる。これをエネルギー保存則に代入すると

$$\frac{M}{m + M} R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2Rg(1 - \cos \theta) = \frac{M}{m + M} v_0^2 \quad (23)$$

が得られる。さらに式 (20) を整理して得られる式

$$2Rg = \frac{M}{M + m} v_0^2 \quad (24)$$

を代入すると

$$R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{m + M}{M} R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = v_0^2 \cos \theta \quad (25)$$

$$\left(R\dot{\theta} \right)^2 = v_0^2 \cos \theta \left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta \right)^{-1} \quad (26)$$

R7

解答例

が得られる。この式に θ を代入すると $|R\dot{\theta}|$ が求まる。運動量保存則から

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m} (v_0 - R\dot{\theta} \cos \theta) \quad (27)$$

が得られるので、これに $R\dot{\theta}$ と θ を代入すると剛体 A の速度 $\dot{X}$ が求まる。

(a) $\theta \doteq 0$ でのぼるとき $R\dot{\theta} = v_0$ なので $\dot{X} = 0$ となる。

(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ でのぼるとき $R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} v_0$ なので

$$\dot{X} = \frac{m}{m+M} v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} \right) \quad (28)$$

となる。

(c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $R\dot{\theta} = 0$ なので $\dot{X} = \frac{m}{m+M} v_0$ となる。

(d) $\theta = \frac{\pi}{3}$ で下るとき $R\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} v_0$ なので

$$\dot{X} = \frac{m}{m+M} v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2M}{4M+3m}} \right) \quad (29)$$

となる。

(e) $\theta \doteq 0$ で下るとき $R\dot{\theta} = -v_0$ なので $\dot{X} = \frac{2m}{M+m} v_0$ となる。

剛体 A は徐々に加速して小球が離れる直前に、弾性衝突したときと同じ速度になる。
この問題では重力が小球と剛体 A の間にはたらく反発力の役割を果たしている。

問 9 正方形の面積 R^2 から $1/4$ 円の面積 $\frac{\pi R^2}{4}$ を差し引き、厚み w との積を計算すると体積 $V = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 w$ が求められる。密度は ρ で一定なので $M = \rho \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 w$ が得られる。

剛体 A の質量は定積分

$$M = \int_0^R \rho w (R - \sqrt{R^2 - x^2}) dx = \rho w R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (30)$$

を $x = R \sin \theta$ で置換することにより積分することもできる。

問 10 与えられた積分を実行すると求めることができる。

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^R \rho x w \left(R - \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \quad (31)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2} \int_0^R x \left(R - \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \quad (32)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2} \left[\frac{Rx^2}{2} + \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^R \quad (33)$$

$$= \frac{2}{12 - 3\pi} R \quad (34)$$

$$y_G = R - x_G \quad (35)$$

問 11 剛体 A には (a) 重力, (b) 小球におよぼす垂直抗力の反作用, (c) 水平面から受ける垂直抗力, (d) ちょうつがいによる剛体 A の角を止める力がはたらいている。(a) と (b) の力の大きさと向きは

$$\vec{F}_{(a)} = (0, -Mg) \quad (36)$$

$$\vec{F}_{(b)} = N(\sin \theta, -\cos \theta) \quad (37)$$

(c) と (d) の力のそれぞれの向きと大きさは分からない。

(補足)

(c) と (d) の力の和は剛体 A にはたらく力がつり合っている (全ての力の和が 0 である) ことから分かる。

$$\vec{F}_{(c)} + \vec{F}_{(d)} = -\vec{F}_{(a)} - \vec{F}_{(b)} = (-N \sin \theta, Mg + N \cos \theta) \quad (38)$$

水平面が滑らかなため (c) の力は y 方向を向いていることを考えると

$$\vec{F}_{(c)} = (0, Mg + N \cos \theta - f_y) \quad (39)$$

$$\vec{F}_{(d)} = (-N \sin \theta, f_y) \quad (40)$$

のように x 成分についてはそれぞれの大きさを求めることができる。しかし f_y の大きさは不定である。

問 12 剛体 A が静止しているときは力のモーメントの和が 0 である。力のモーメントは力とうでの長さの積で、うでの長さは回転中心 (点 J) から力の作用線までの距離である。従ってちょうつがいによる剛体の角を止める力 ($\vec{F}_{(d)}$) は力のモーメントを持たない。このため (a) 重力, (b) 小球におよぼす垂直抗力の反作用, (c) 水平面からの

垂直抗力による力のモーメントの和が0という条件が得られる。

$\vec{F}_{(a)}$ による力は重心にかかると考えて良い。従って作用線は重心を通る y 軸に平行である。従って回転中心 (点 J) から作用線までの距離は $R - x_G$ であり, 力のモーメントは

$$\mathcal{M}_{(a)} = (R - x_G)Mg = \frac{2}{(4 - \pi)} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) RMg \quad (41)$$

となる。この力は剛体 A を反時計周りに回転させる方向にはたらく。

$\vec{F}_{(b)}$ の作用点は小球の位置で, 作用線は方程式

$$y = -\frac{1}{\tan \theta} (x - R \sin \theta) + R(1 - \cos \theta) \quad (42)$$

と表すことができる。回転の中心である点 J から作用線までの距離 (=うでの長さ) は

$$\ell = \sqrt{2}R \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (43)$$

である。距離は常に正であるが, ここでは力のモーメントを求めるのが目的なので, 作用線が回転中心より上にあるときを正, 下にあるときは負となるよう符号をつけておいた。剛体 A を傾ける方を正となるように力のモーメントを定義すると

$$\mathcal{M}_{(b)} = \sqrt{2}R \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) N \quad (44)$$

$$= \sqrt{2}Rm \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos \theta \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (45)$$

が得られる。

従って水平面からの垂直抗力による力のモーメントは

$$\mathcal{M}_{(c)} = \mathcal{M}_{(a)} - \mathcal{M}_{(b)} \quad (46)$$

$$= \frac{2}{(4 - \pi)} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) RMg - \sqrt{2}Rm \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos \theta \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (47)$$

である。垂直抗力は剛体 A を時計回りに回転させるようにはたらくはずなので, $\mathcal{M}_{(c)} \geq 0$ でなくてはならない。

問 13 問 12 で求めた $\mathcal{M}_{(c)}$ が負になると剛体 A は静止できなくなる。これを式に表すと

となると

$$\frac{2}{(4-\pi)} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) RMg < \sqrt{2}mR \left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g \cos \theta \right) \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (48)$$

となる。

問 14 (a) 剛体の重力による力のモーメントは剛体の傾きを止める方向に働き一定である (式 (41) を参照のこと)。従って小球による力のモーメントが $\mathcal{M}_{(b)} > 0$ のときだけ、剛体が傾く可能性がある。式 (45) より $\theta > \frac{\pi}{4}$ のときだけこの可能性があることが示せる。

(b) 与えられた条件のとき小球による力のモーメントは

$$\mathcal{M}_{(b)} = 3\sqrt{2}mRg \cos \theta \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (49)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}mRg \left[\sin \left(2\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \frac{\pi}{4} \right] \quad (50)$$

となる。従って剛体を回転させる力のモーメントは $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\frac{\pi}{2}$ で $\mathcal{M}_{(b)} = 0$ で、 $\theta = \frac{3\pi}{8}$ で最大となる。傾き始めるかどうかは、問 13 で求めた条件に $\theta = \frac{3\pi}{8}$ を代入して確認することができる。

解答例：課題II

出題の意図

抵抗とコンデンサーの直列回路において、電源の電圧を変化させたときにどのようにコンデンサーが充電されていくかに関して、数学を用いて求めていく。高校の物理では、充電の細かな過程を扱わないが、キルヒホッフの法則と微分積分の計算を用いれば充電される際の時間変化も求めることができる。電気回路に関する基礎知識と微分積分の計算能力を試験するための問題である。

R7

解答例

問1 コンデンサーに蓄えられる電荷とエネルギーを求める基本的な問題である。電気回路に関する基礎的な知識を問う。

(a) コンデンサーに蓄えられる電荷と電圧の関係から $q = \boxed{CE_0}$ が得られる。

(b) コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーの公式より、 $U = \boxed{\frac{C}{2}E_0^2}$ となる。

(c) 十分時間がたつと電流が流れないので、単位時間あたりに発生するジュール熱は $\boxed{0}$ である。

問2 キルヒホッフの法則を用いて電圧の関係から、コンデンサーに蓄えられる電荷の量 $q(t)$ に関する方程式を導く問題である。微分方程式と呼ばれる $q(t)$ と $\frac{dq(t)}{dt}$ を含む方程式が導かれる。電気回路に関する基礎的な知識を問う。

(a) コンデンサーに蓄えられる電荷と電圧の関係から $V(t) = \boxed{\frac{q(t)}{C}}$ となる。

(b) キルヒホッフの法則より、 $E(t) = RI(t) + \frac{q(t)}{C}$ 。 $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ より

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E(t)。すなわち、\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{1}{R}E(t)。$$

よって、 $k_1 = \boxed{\frac{1}{CR}}$ ， $k_2 = \boxed{\frac{1}{R}}$ である。

問3 微分方程式を解くための準備としての式変形を示す。合成関数の微分など微分の計算が行えるかを検査する。

$$\frac{d}{dt}(q(t)e^{k_1t}) = k_2E(t)e^{k_1t} \text{の左辺を計算すると、}\frac{d}{dt}(q(t)e^{k_1t}) = \frac{dq(t)}{dt}e^{k_1t} + k_1q(t)e^{k_1t}$$

これを左辺に代入し、両辺に e^{-k_1t} をかけると、 $\frac{dq(t)}{dt} + k_1q(t) = k_2E(t)$ となる。

よって示された。

問4 コンデンサーが充電されていない状態から、電源の電圧を一瞬で上昇させて一定の状態にしたときのコンデンサーの充電する過程を微分方程式から計算する。誘導に

従って積分の計算や極限値の計算ができるかを検査する。また、電気回路におけるエネルギー保存則を理解できているかを検査する。

- (a) $\frac{d}{d\tau} (q(\tau)e^{k_1\tau}) = k_2 E(\tau)e^{k_1\tau}$ において, $t \geq 0$ では $E(t) = E_0$ とできる。

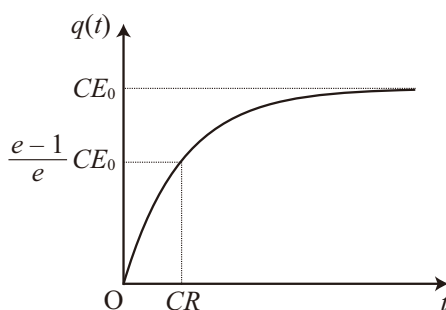
よって, τ で $\tau = 0$ から $\tau = t$ まで積分すると,

$$q(t)e^{k_1 t} - q(0)e^{k_1 \cdot 0} = k_2 E_0 \int_0^t e^{k_1 \tau} d\tau$$

$$\text{よって, } q(t) = k_2 E_0 e^{-k_1 t} \frac{1}{k_1} (e^{k_1 t} - 1) = \frac{k_2 E_0}{k_1} (1 - e^{-k_1 t})$$

k_1, k_2 に値を代入すると, $q(t) = \boxed{CE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)}$ が得られる。

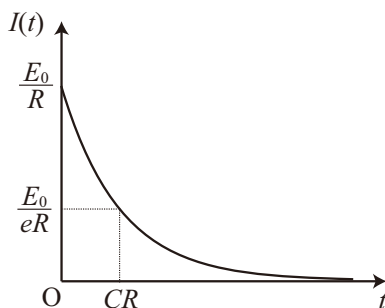
グラフは以下ようになる。



- (b) 電流は $I(t) = \frac{1}{R} \left(E_0 - \frac{q(t)}{C} \right) = \frac{1}{R} \left[E_0 - E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right) \right] = \boxed{\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}}}$ となる。

あるいは, 問 4(a) で求めた $I(t)$ を微分して, $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ から求めてもよい。

グラフは以下ようになる。



- (c) 電力を求めると, $P(t) = RI(t)^2 = \boxed{\frac{E_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{CR}}}$ となる。

- (d) 電力 $P(t)$ を積分してジュール熱を求める。具体的に計算すると

$$Q(T) = \int_0^T P(t) dt = \frac{E_0^2 CR}{R} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2T}{CR}} \right) = \boxed{\frac{CE_0^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2T}{CR}} \right)}$$
 となる。

また, 極限値は, $T \rightarrow \infty$ で $e^{-\frac{2T}{CR}} \rightarrow 0$ であることを考えて

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q(T) = \boxed{\frac{CE_0^2}{2}}$$
 と求められる。

(e) 定義に従って仕事を計算すると,

$$W(T) = \int_0^T E_0 \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}} dt = \frac{E_0^2}{R} CR \left(1 - e^{-\frac{T}{CR}}\right) = \boxed{CE_0^2 \left(1 - e^{-\frac{T}{CR}}\right)} \text{ となる.}$$

また, 極限值は, 同様に $T \rightarrow \infty$ で $e^{-\frac{T}{CR}} \rightarrow 0$ であることを考えて

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W(T) = \boxed{CE_0^2} \text{ と求められる.}$$

(f) 上で求めた値より $\frac{Q_\infty}{W_\infty} = \boxed{\frac{1}{2}}$ が得られる.

(g) 電源がした仕事 $W_\infty = CE_0^2$ のうち半分の $\frac{CE_0^2}{2}$ は最終的にコンデンサーに静

電エネルギーとして蓄えられ, 残り半分の $Q_\infty = \frac{CE_0^2}{2}$ は抵抗でジュール熱となった.

問5 コンデンサーが充電されていない状態から, 電源の電圧を一定の割合で上昇させたときにコンデンサーが充電される過程を微分方程式から計算する. 誘導に従って現象を理解する能力, 複雑な微積分や指数関数の計算を実行する計算力, 回路におけるエネルギー保存則の理解を問う.

(a) $\frac{d}{d\tau} (q(\tau)e^{k_1\tau}) = k_2 E(\tau)e^{k_1\tau}$ において, $0 \leq t \leq T_0$ では $E(t) = a\frac{t}{CR} + b$ として τ で $\tau = 0$ から $\tau = t$ まで積分すると,

$$q(t)e^{k_1 t} - q(0)e^{k_1 \cdot 0} = k_2 \int_0^t \left(a\frac{\tau}{CR} + b\right) e^{k_1 \tau} d\tau. \text{ よって,}$$

$$q(t) = k_2 e^{-k_1 t} \left[\frac{1}{k_1} \left(a\frac{t}{CR} + b\right) e^{k_1 t} - \frac{1}{k_1} b - \int_0^t \frac{1}{k_1} \frac{a}{CR} e^{k_1 \tau} d\tau \right]$$

$$= \frac{k_2}{k_1} e^{-k_1 t} \left[\left(a\frac{t}{CR} + b\right) e^{k_1 t} - b - \frac{a}{k_1 CR} (e^{k_1 t} - 1) \right]$$

$$= \frac{k_2}{k_1} \left[a\frac{t}{CR} - \left(\frac{a}{k_1 CR} - b\right) (1 - e^{-k_1 t}) \right]$$

$$k_1, k_2 \text{ を代入すると } q(t) = \boxed{C \left[a\frac{t}{CR} + (b-a) \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) \right]} \text{ となる.}$$

(b) $I(t) = \frac{1}{R} \left(E(t) - \frac{q(t)}{C} \right)$ より

$$I(t) = \frac{1}{R} \left\{ a\frac{t}{CR} + b - \left[a\frac{t}{CR} + (b-a) \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{R} \left[a \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right) + b e^{-\frac{t}{CR}} \right] = \boxed{\frac{1}{R} \left[a + (b-a) e^{-\frac{t}{CR}} \right]} \text{ と求められる.}$$

あるいは, 問5(a) で求めた $I(t)$ を微分して, $I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ から求めてもよい.

(c) 発生するジュール熱 Q は

$$Q = \int_0^{T_0} RI(t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{T_0} \left[a^2 + 2a(b-a) e^{-\frac{t}{CR}} + (b-a)^2 e^{-\frac{2t}{CR}} \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{R} \left[a^2 T_0 + 2aCR(b-a) \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right) + (b-a)^2 \frac{CR}{2} \left(1 - e^{-\frac{2T_0}{CR}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{R} \left\{ a^2 T_0 + (b-a)CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right) \left[2a + \frac{1}{2} (b-a) \left(1 + e^{-\frac{T_0}{CR}} \right) \right] \right\} \\
&\text{と得られる。}
\end{aligned}$$

- (d) (a) で得られた $q(t)$ に $t = T_0$ を代入すると $q(T_0) = C \left[a \frac{T_0}{CR} + (b-a) \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right) \right]$ となる。

$$q(T_0) = q_0 \text{ より整理すると, } b = \frac{T_0 \frac{q_0 R}{T_0} - a}{CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right)} + a \text{ となる。}$$

- (e) (d) より $b-a = \frac{T_0 \frac{q_0 R}{T_0} - a}{CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right)}$ であるので, これを代入すると

$$Q = C \left\{ a^2 \frac{T_0}{CR} + \frac{T_0}{CR} \left(\frac{q_0 R}{T_0} - a \right) \left[2a + \frac{T_0}{2CR} \left(\frac{q_0 R}{T_0} - a \right) \frac{1 + e^{-\frac{T_0}{CR}}}{1 - e^{-\frac{T_0}{CR}}} \right] \right\} \text{ となる。}$$

$$\text{簡単のため, } \kappa = \frac{1 + e^{-\frac{T_0}{CR}}}{2 \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right)}, \quad \tau = \frac{T_0}{CR}, \quad \alpha = \frac{q_0 R}{T_0} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned}
Q &= C \{ a^2 \tau + \tau (\alpha - a) [2a + \tau \kappa (\alpha - a)] \} \\
&= C [(\tau^2 \kappa - \tau) a^2 + (2\tau \alpha - 2\tau^2 \kappa \alpha) a + \tau^2 \kappa \alpha^2] \\
&= C(\tau^2 \kappa - \tau)(a - \alpha)^2 + C\tau \alpha^2 \text{ と平方完成できる。}
\end{aligned}$$

$$\text{二次の係数は } \tau^2 \kappa - \tau = \tau \left(\frac{1 + e^{-\tau}}{2(1 - e^{-\tau})} - 1 \right) \text{ となる。}$$

$$\tau > 0 \text{ であることと問題で与えられた不等式より, } \frac{1 + e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau}} > \frac{2}{\tau} \text{ であるので,}$$

$$\tau^2 \kappa - \tau > 0 \text{ が言える。よって, } Q \text{ の式は下に凸であり, } a = \alpha = \frac{q_0 R}{T_0} \text{ で最小}$$

$$\text{となる。} Q \text{ の最小値は, } Q_{\min} = C\tau \alpha^2 = \frac{q_0^2 R}{T_0} \text{ である。}$$

$$\text{また, このときの } b \text{ は } b = \frac{T_0 \frac{q_0 R}{T_0} - \frac{q_0 R}{T_0}}{CR \left(1 - e^{-\frac{T_0}{CR}} \right)} + \frac{q_0 R}{T_0} = \frac{q_0 R}{T_0} \text{ と求められる。}$$

- (f) 上で求めた a, b を代入すると

$$q(t) = C \left[\frac{q_0 R}{T_0} \frac{t}{CR} + \left(\frac{q_0 R}{T_0} - \frac{q_0 R}{T_0} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right) \right] = \frac{q_0}{T_0} t \text{ と求められる。}$$

すなわち, 一定の割合で充電される。

$$\text{コンデンサーの両端の電圧は } V(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{CT_0} t \text{ と求められる。}$$

$$\text{電源の電圧は } E(t) = \frac{q_0}{CT_0} t + \frac{Rq_0}{T_0} \text{ であるので, 抵抗での電圧降下が } \frac{Rq_0}{T_0} \text{ であることもわかる。}$$

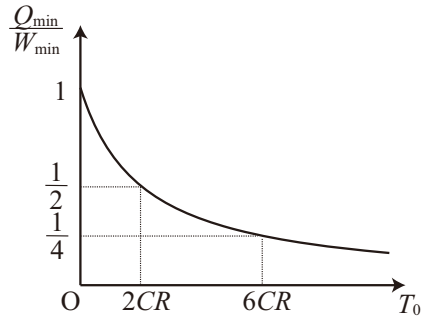
- (g) 電源がした仕事 $W_{\min}$ は, 抵抗で発生したジュール熱 $Q_{\min}$ とコンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U の和になる。 $t = T_0$ において, コンデンサーに蓄えられた電荷は q_0 なので, 静電エネルギーは $U = \frac{q_0^2}{2C}$ と求められる。

よって、電源がした仕事は $W_{\min} = U + Q_{\min} = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{Rq_0^2}{T_0} = \left(\frac{1}{2C} + \frac{R}{T_0} \right) q_0^2$ である。

この $W_{\min}$ は $W = \int_0^{T_0} I(t)E(t)dt$ から求めてもよい。

求めた $W_{\min}$ と $Q_{\min}$ を用いて、 $\frac{Q_{\min}}{W_{\min}} = \frac{\frac{Rq_0^2}{T_0}}{\left(\frac{1}{2C} + \frac{R}{T_0} \right) q_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{T_0}{2CR}}$ が得られる。

グラフは双曲線であり、 $T_0 = 0$ で 1, $T_0 \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。グラフは以下のようなになる。



令和6年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理

課題I, II

(12:30-17:30)

R6
—
課題

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

鉛直面内のなめらかな曲線上の質量 m の小球の運動を解析しよう。運動する小球は十分に小さく、摩擦や空気抵抗は考えなくてよい。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えなさい。

A 曲線としてまずは半円の場合を考える。図1のように固定された半径 r の半円の頂点に小球を静かに置くと、小球は半円上をすべりだした。

問1 図1で示される、鉛直線とのなす角度が ϕ の位置を小球がすべっているときの小球の速さ v を求めなさい。

問2 小球は $\phi = \phi_1$ で半円上から離れた。 $\cos \phi_1$ を求めなさい。

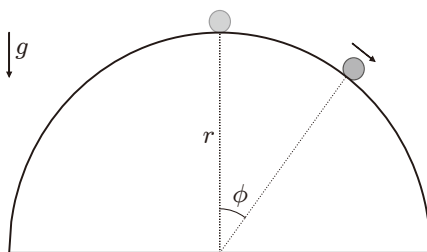


図1

(次ページに続く)

B 一般の曲線の場合にどのような条件で小球が曲線上から離れるかを考察しよう。水平方向を x 軸、鉛直上向きを y 軸正方向にとる座標系で曲線は $y = f(x)$ で定義されているとする。このような一般の曲線の場合にも、小球の各位置の運動を円周上の運動と近似的にみなすことによって、小球が曲線から離れず運動するかどうか判定できる。具体的には、曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点 $(x_P, f(x_P))$ に対し、円周がその点を通り、かつその点での曲線の第1次微分係数 $f'(x_P)$ と第2次微分係数 $f''(x_P)$ が、同じ点での円周の第1次微分係数 $y'(x_P)$ と第2次微分係数 $y''(x_P)$ とそれぞれ等しくなるような円 $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ を考え、その点での小球の運動をこの接円上の運動と近似する。接円は中心が (x_c, y_c) で半径が R 、また x 軸正方向から反時計回りに定義された偏角 θ の点 $(x_P, y_P = f(x_P))$ で曲線と接している。これらの接円のパラメータは曲線上で小球が移動するとともに変化していく。図2に、例としてある曲線上の二つの点のそれぞれでこのようにして定義された接円を破線で示している。

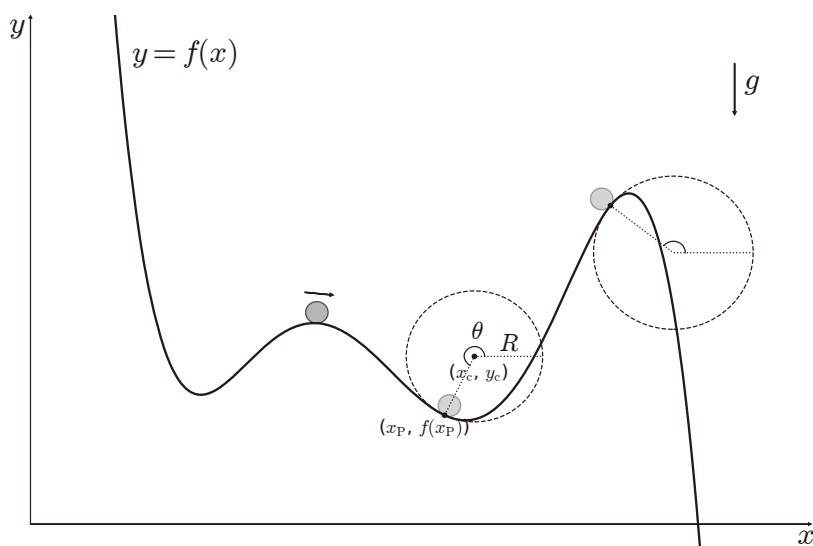


図2

問3 接円の方程式 $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ をもとに計算することで、接円の円周上の点 (x_P, y_P) における y を x の関数と見たときの円周の第1次微分係数 $y'(x_P)$ および第2次微分係数 $y''(x_P)$ を x_P, y_P, x_c, y_c のうち必要なものを用いて表しなさい。ただし $y_P - y_c \neq 0$ とする。

問4 接円のパラメータ R と θ の定義より、 $x_P - x_c = R \cos \theta$, $y_P - y_c = R \sin \theta$ と書けること、および点 $(x_P, y_P = f(x_P))$ において、問3で求めた $y'(x_P)$ と $y''(x_P)$ に対して $f'(x_P) = y'(x_P)$, $f''(x_P) = y''(x_P)$ が成り立つことから、 $f'(x_P)$ と $f''(x_P)$ をそれぞれ R と θ のうち必要なものを用いて表しなさい。

問 5 小球の曲線上の各位置での運動をその点での接円上の運動と近似することにより，曲線上を運動している小球がそのまま曲線上を離れず運動する条件は，その位置での小球の速さ v およびその位置での曲線の第 1 次微分係数 f' と第 2 次微分係数 f'' を用いて

$$\{1 + (f')^2\} g + f'' v^2 > 0 \quad (1)$$

と書けることを示しなさい。

(次ページに続く)

C 具体例として

$$y = f(x) = -b \sin \frac{x}{a} \quad (x \leq 2\pi a)$$

で与えられる曲線上の小球の運動を、問5の式(1)で与えられる条件式を用いて調べよう。ただし $a > 0$, $b > 0$ とする。図3のように原点 $(0, 0)$ の位置にある小球に対して原点での曲線 $y = f(x)$ の接線方向に速さ v_0 で x の正の向きに運動させた。

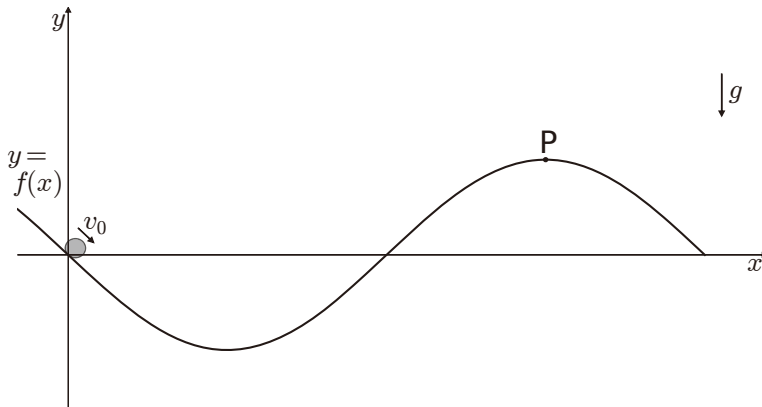


図3

- 問6** 小球が $x = 0$ から $x = 2\pi a$ の範囲の曲線上のある点 $(x, f(x))$ まで曲線上を一度も離れずに運動したとき、その位置での小球の速さ v を v_0 , a , b , g , x のうち必要なものを用いて表しなさい。
- 問7** 原点から運動を始めた小球が、曲線上を一度も離れることなく点 $P \left(\frac{3}{2}\pi a, b \right)$ に到達するためには v_0 が $v_{0,\min} < v_0 < v_{0,\max}$ の範囲になくなくてはならない。 $v_0 < v_{0,\min}$ の場合は、小球は点 P の手前で引き返す。 $v_{0,\min}$ を g , a , b のうち必要なものを用いて表しなさい。
- 問8** 問7の $v_{0,\max}$ を g , a , b のうち必要なものを用いて表しなさい。
- 問9** $v_0 > v_{0,\max}$ のとき、小球は $\pi a < x_1 < \frac{3}{2}\pi a$ を満たす $x = x_1$ で曲線上を離れる。小球が曲線上を離れるときの y 座標 $y_1 = f(x_1)$ を v_0 , a , b , g のうち必要なものを用いて表しなさい。

問9の問題文の条件を満たし、 $x = x_1$ で曲線上を離れた小球は図4のように放物運動を行い、 x 軸上の点Bに到達した。放物運動の x 軸からみた最大の高さを H 、曲線の終端の点 $A(2\pi a, 0)$ から点Bまでの距離を L とする。 $x = x_1$ で曲線上を離れた小球が再び曲線とぶつかる可能性は考えなくてよいものとして、以下の問いに答えなさい。

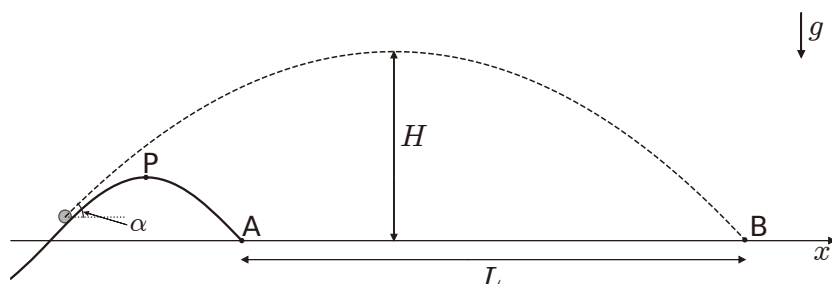


図4

- 問10 小球が (x_1, y_1) で曲線上を離れた瞬間の、小球の速度の向きと x 軸正方向のなす角を α とする。ただし α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす。 $\tan \alpha$ を v_0, a, b, g のうち必要なものを用いて表しなさい。
- 問11 放物運動の x 軸からみた最大の高さ H を $v_0, a, b, g, \tan \alpha$ のうち必要なものを用いて表しなさい。
- 問12 v_0 を十分大きな値にとると、 $\tan \alpha$ は v_0 によらないある値に近づく。その値を a, b を用いて表しなさい。必要があれば $|x| \ll 1$ の場合に成り立つ近似式 $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2}$ を用いなさい。
- 問13 問12で考えた十分大きなある v_0 に対して、 a を固定した上で b を変化させるとき、距離 L を最大にする b を求めなさい。

(次ページに続く)

D 次に、他の具体例として

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{d}{2} \left(\cos \frac{x}{s} - 1 \right) & (0 \leq x \leq 2\pi s) \\ 0 & (x < 0, \quad 2\pi s < x) \end{cases}$$

で与えられる曲線上の小球の運動を、問5の式(1)で与えられる条件式を用いて調べよう。ただし $d > 0$, $s > 0$ とする。図5のように $x < 0$ のある位置から速さ v_0 で x の正の向きに運動させた場合に、以下の問いに答えなさい。

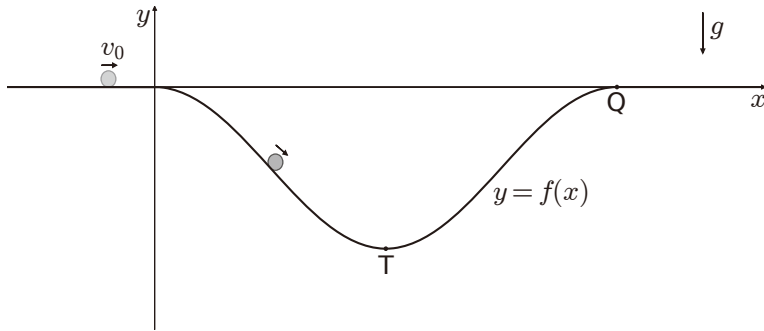


図5

問14 小球が一度も曲線上を離れることなく運動し点 $Q(2\pi s, 0)$ に到達するために、 v_0 が満たすべき条件を d , s , g のうち必要なものを用いて表しなさい。

問15 小球が問14の条件を満たして運動するものとする。点 $T(\pi s, -d)$ で小球が曲線から受ける垂直抗力 N を m , d , s , g , v_0 のうち必要なものを用いて表しなさい。

問16 問14と問15の結果を用いることで、速さ v_0 で平面を滑っているスキーヤーが $y = f(x)$ で表される形状のくぼみを通過するときの運動を考察しよう。 $v_0 = 36 \text{ km/h}$, $s = 1.0 \text{ m}$, 重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とし、小球で近似されるスキーヤーが地面から離れずにくぼみを通過して点 Q に達するための、くぼみの深さ d が満たすべき条件を求め、さらにこの条件下で点 T における垂直抗力 N と重力 mg との比 $\frac{N}{mg}$ がとりうる最大値の概数値を求めなさい。

[II]

荷電粒子は電場や磁場により、その速度が変化する。この性質を利用すると、荷電粒子の質量 m を測定したり、特定の運動エネルギーをもつ荷電粒子だけを集めることができる。以下の設問に従って、その原理を考えてみよう。

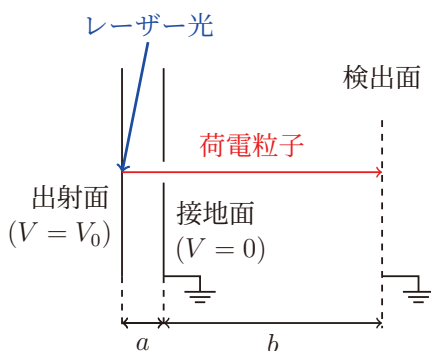


図 1

最初はレーザー光を照射すると、質量 m 、電荷 q ($q > 0$) の荷電粒子が出射面から初速 0 で放出される装置を考えよう。図 1 のように出射面、接地面、検出面は平行で、出射面と接地面は a 、接地面と検出面は b 離れている。出射面に正の電位 (V_0) をかけると、荷電粒子は加速され、接地面の小孔を通過して接地された検出面に到達する。荷電粒子が出射面から放出され、検出面に到達するまでの時間 Δt を以下の設問に従って導きなさい。なお装置は真空中にあり、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

問 1 出射面と接地面を金属で製作すると、コンデンサーと同様に、2つの向かい合った面の間にだけ電場が発生する。2つの面の面積をそれぞれ S として、電場の強さ E と向きを求めなさい。また出射面に蓄えられる電荷 Q を求めなさい。出射面の電位は V_0 、接地面の電位は 0 である。

問 2 荷電粒子が出射面から放出され、検出面に到達するまでの時間 Δt を求めなさい。またこの関係を用いて、質量 m を Δt 、 q 、 V_0 、 a 、 b を用いて表しなさい。

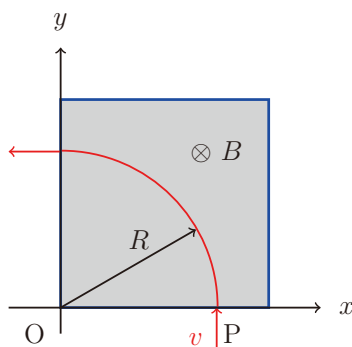


図 2

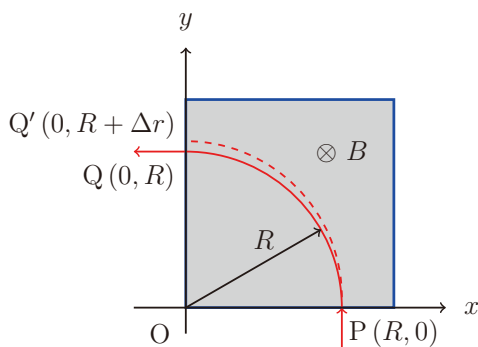


図 3

次に荷電粒子の軌跡からその質量を測定する方法を考える。図2に示すように磁束密度 B の磁場が紙面に垂直で一様な領域に、点 P から荷電粒子を磁場に垂直に入射すると、その軌跡は円弧となる。

問 3 質量 m 、電荷 q ($q > 0$) の荷電粒子を、速度 $(v_x, v_y) = (0, v)$ で入射させると、その軌跡が、図2に示すように座標の原点 O を中心とする半径 R の円弧となった。このときの軌道半径 R を求めなさい。磁束密度の大きさ B は一定で、磁場は紙面に垂直で表から裏へと向かうとする。

問 4 図1の装置で加速した荷電粒子を図2の装置に入射させた場合を考える。このときの荷電粒子の軌道半径 R を、 m, q, V_0, B を用いて表しなさい。

図3は図2に少しずれた軌跡を破線で書き加えたものである。入射角度が y 軸方向からずれている場合や、質量が m より少し大きい場合には、破線で示すように荷電粒子は点 Q から Δr ずれた点 Q' を通過する。図1の装置の電圧 V_0 は一定に保たれているという条件のもとで、それぞれの場合について位置のずれを求めてみよう。

問 5 質量 m の荷電粒子が点 P で速度が $(v_x, v_y) = (v \sin \theta, v \cos \theta)$ のとき、 $\Delta r \doteq f(R)\theta$ と表せる。関数 $f(R)$ を求めなさい。ただし θ ($|\theta| \ll 1$) はラジアンで測った角度で、 $\sin \theta \doteq \theta$ かつ $\cos \theta \doteq 1$ であることを証明せずに使って良い。

問 6 質量が $m + \Delta m$ (ただし $|\Delta m| \ll m$) の場合、 $\Delta r \doteq h(R)\frac{\Delta m}{m}$ という関係が得られる。この設問では点 P より x 軸に垂直に入射する荷電粒子を考え、関数 $h(R)$ を求めなさい。また一般に $|s| \ll 1$ の場合、実数 n に対して $(1 + s)^n \doteq 1 + ns$ が成り立つことを証明せずに使って良い。

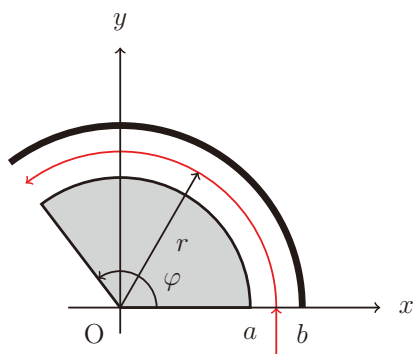


図 4

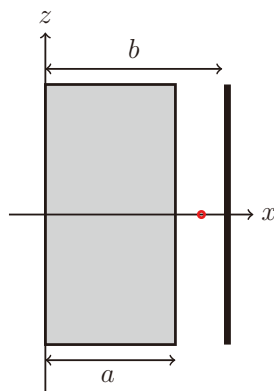


図 5

図 4 に示すように真上から見た断面が半径 a 、角度 φ の扇型と、内径が b の円弧となる装置を考える。この装置の $y = 0$ での断面は図 5 のようになっていて、装置は扇型と円弧の間隔 $b - a$ に比べ z 方向に十分に長く伸びている。扇型も円弧も金属で、適切な電圧を加えると、コンデンサーと同様に扇型と円弧の間だけに扇型の中心へと向かう電場が生じる。また電場の強さは z 軸からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ の関数 $E(r)$ であると考えて良い。従って電位も

$$V(r) = - \int_a^r E(r') dr' \quad (1)$$

のように積分を用い、 r の関数として表すことができる。ここで扇型の中心からの距離が r' の点での電場の強さ $E(r')$ は、扇型の中心から外向きを正とするので符号に注意すること。電位差が適切であれば、この空隙を運動する荷電粒子の軌道を半径 $r = R$ の円弧とすることができる。この装置の仕組みを考えてみよう。荷電粒子は $z = 0$ の面内を運動すると考える。

問 7 質量 m 、電荷 q の荷電粒子が速度 v で半径 R の円運動をするために必要な、半径 $r = R$ での電場の大きさ E_0 を求めなさい。

問 8 問 7 で求めた電場が発生するときの電位 $V(b)$ を求めたい。電気力線がどのようなか考え、扇型の中心からの距離が r ($a < r < b$) の点での電場ベクトルの r 成分 $E(r)$ を求めなさい。また式 (1) を用いて電位 $V(b)$ を求め、 E_0 、 R 、 a 、 b を用いて表しなさい。

問 9 図 1 の装置で加速した荷電粒子を図 4、図 5 の装置に入射する場合を考えよう。荷電粒子が半径 $r = R$ の円弧に沿って運動するのは、 V_0 と $V(b)$ がある関係を満たす場合に限られる。この関係を求めるとともに、その関係式は質量 m や電荷 q によらないことを示しなさい。

問5で考えたように磁場を使った装置では、垂直に入射しなかった場合は出射位置がずれる。電場を使った装置では、扇型の角度 φ を 120° に近いある角度に設定すれば、この問題を解決できることを示そう。

この装置の $z = 0$ の面での電場は図4の原点 O の方を向いているので、面積速度一定の法則 (高校物理の教科書「ケプラーの第2法則」を参照すること) が成り立つ。この法則が成り立つことを以下の設問に従って確認しなさい。

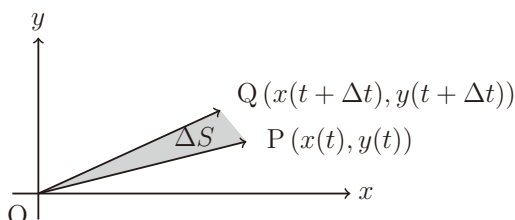


図6

問10 図6を使って xy 平面上を運動する荷電粒子の面積速度 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ を求めよう。原点を O 、時刻 t と $t + \Delta t$ での荷電粒子の位置を P, Q とすると、面積速度は三角形 OPQ の面積 ΔS と時間差 Δt の比である。面積速度を時刻 t での荷電粒子の位置 $(x(t), y(t))$ と速度 $(v_x(t), v_y(t))$ を用いて表しなさい。時刻 $t + \Delta t$ での位置は $x(t + \Delta t) \doteq x(t) + v_x(t)\Delta t$, $y(t + \Delta t) \doteq y(t) + v_y(t)\Delta t$ と考えて良い。

問11 z 軸からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用いると、この装置での電場ベクトルは

$$\vec{E} = (E_x, E_y) = \left(\frac{E(r)x}{r}, \frac{E(r)y}{r} \right) \quad (2)$$

と表せる。この電場によるクーロン力は荷電粒子の面積速度の2倍に対応する量 $j = 2\frac{\Delta S}{\Delta t}$ を時間変化させないことを運動方程式を用いて示しなさい。

(次ページに続く)

半径 r 、速さ v で等速円運動する質量 m の荷電粒子の遠心力 (つまり慣性力) は、外向きでその大きさは

$$F' = \frac{mv^2}{r} \quad (3)$$

である。この荷電粒子では、 $j = 2\frac{\Delta S}{\Delta t} = rv$ なので、 $v = \frac{j}{r}$ が得られる。これを式 (3) に代入すると

$$F' = \frac{mj^2}{r^3} \quad (4)$$

が得られる。等速円運動していない場合でも、式 (4) は z 軸から遠ざかる向きの慣性力 (= 遠心力) を正しく与えることが知られている。

問 12 問 8 で求めた電場 $E(r)$ を用いて、 $j = Rv$ の荷電粒子に働く力を求めよう。原点から荷電粒子までの距離が $r = R + \Delta r$ であるとき、荷電粒子に働く電場による力 F と遠心力 F' の和は

$$F + F' \doteq -\kappa \Delta r \quad (5)$$

と表せることを示し、 κ を求めなさい。ただし、 $|\Delta r| \ll R$ として適切な近似を行うこと。

問 13 式 (5) は $F + F'$ が、 $r = R$ の位置に戻そうとする復元力であることを示している。半径 $r = R$ から少し斜めに入射した荷電粒子の半径 r は $r = R$ のまわりでわずかに増減するが、角度が φ のとき半径 $r = R$ にはじめて戻ってくる。このことを利用して角度 φ を求めなさい。

令和6年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理 課題I, II

解答例

R6
解答例

解答例：課題I

出題の意図

力学の基本概念である力の釣り合い，エネルギー保存，放物運動を正しく取り扱えるかを確認します。複雑な方程式や不等式を最後まで解き切る数理能力，知的体力も確認し，また極限の操作や近似を正しく取り扱えるかも問います。分量も多いため，実力があっても時間内での完答は困難かもしれませんが，一方で時間にこだわらずじっくり解くことで物理の面白さが感じ取れるような問題となっていることを期待しています。

R6

解答例

問1 エネルギーの保存を考えると

$$mgr = mgr \cos \phi + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

なので

$$v = \sqrt{2gr(1 - \cos \phi)} \quad (2)$$

となる。

問2 回転座標系における力の釣り合いを考えると，垂直抗力を N として

$$mg \cos \phi = N + m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

が得られる。小球が半円上を離れる $\phi = \phi_1$ で $N = 0$ となるので，式 (2) と (3) から

$$mg \cos \phi_1 = m \frac{2gr(1 - \cos \phi_1)}{r} \quad (4)$$

となり，これを整理すると

$$\cos \phi_1 = \frac{2}{3} \quad (5)$$

となる。

問3 円周の式 $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$ を x で微分して得られる式

$$2(x - x_c) + 2(y - y_c)y' = 0 \quad (6)$$

から

$$y'(x_P) = -\frac{x_P - x_c}{y_P - y_c} \quad (7)$$

が得られる。また，式 (6) をさらに x で微分して

$$2 + 2(y')^2 + 2(y - y_c)y'' = 0 \quad (8)$$

より、式 (7) と組み合わせて

$$y''(x_P) = -\frac{1}{y_P - y_c} - \frac{(x_P - x_c)^2}{(y_P - y_c)^3} \quad (9)$$

が得られる。

問 4 問題文で与えられた $x_P - x_c = R \cos \theta$, $y_P - y_c = R \sin \theta$ を式 (7) に代入して

$$f'(x_P) = y'(x_P) = -\frac{1}{\tan \theta} \quad (10)$$

となる。また、式 (9) から同様に

$$f''(x_P) = y''(x_P) = -\frac{1}{R \sin \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{R \sin^3 \theta} = -\frac{1}{R \sin^3 \theta} \quad (11)$$

が得られる。

問 5 問 2 と同様に回転座標系での力の釣り合いを考える。 $0 < \theta < \pi$ のとき、

$$mg \sin \theta = N + m \frac{v^2}{R} \quad (12)$$

であり、小球が曲線上を離れない条件は $N > 0$ 、すなわち

$$g \sin \theta - \frac{v^2}{R} > 0 \quad (13)$$

となる。ここで問 4 の結果を用いると

$$\frac{1}{R} = -f'' \sin^3 \theta = -\frac{f''}{1 + (f')^2} \sin \theta \quad (14)$$

となるので、式 (13) に代入して

$$\{1 + (f')^2\} g + f'' v^2 > 0 \quad (15)$$

と問題文の条件式が得られる。また $\pi < \theta < 2\pi$ の時は、力の釣り合いの式は $\sin \theta < 0$ であることに注意すると

$$N + mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (16)$$

と書け、これに式 (14) を代入すると同じ条件式 (15) が得られる。

問 6 エネルギーの保存を考えると

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - m g b \sin \frac{x}{a} \quad (17)$$

なので

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gb \sin \frac{x}{a}} \quad (18)$$

となる。

問7 点Pに到達する必要条件として、点Pの位置エネルギーより大きな運動エネルギーを初期条件として与える必要があることから

$$\frac{1}{2}mv_0^2 > mgb \quad (19)$$

したがって

$$v_0 > v_{0,\min} = \sqrt{2gb} \quad (20)$$

となる。厳密には $v_0 = v_{0,\min}$ の時に小球が曲線上を離れないことを示す必要があるが、これは問8の解答から確認できるので、ここでは不問とする。

問8 問題文で与えられた条件である式(15)と問6の解答から、小球が曲線上を離れないためには

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \frac{x}{a}\right) g + \frac{b}{a^2} \left(v_0^2 + 2gb \sin \frac{x}{a}\right) \sin \frac{x}{a} > 0 \quad (21)$$

を常に満たす必要がある。この式を

$$u = \sin \frac{x}{a} \quad (22)$$

を使って書き換えると

$$u^2 + \frac{v_0^2}{gb}u + 1 + \frac{a^2}{b^2} > 0 \quad (23)$$

さらに変形すると

$$F(u) = \left(u + \frac{v_0^2}{2gb}\right)^2 + 1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{v_0^4}{4g^2b^2} > 0 \quad (24)$$

問7の条件より左辺の放物線の頂点は常に $u < -1$ となりかつ下に凸の放物線なので、 u が $-1 \leq u \leq 1$ の値しか取らないことに注意すると、曲線上を一度も離れることなく点Pに到達するためには $v_0 > v_{0,\min}$ かつ

$$F(-1) > 0 \quad (25)$$

であればよいことがわかる。具体的に計算すると

$$v_0 < v_{0,\max} = \sqrt{2gb \left(1 + \frac{a^2}{2b^2}\right)} \quad (26)$$

となる。

問 9 $x = x_1$ で式 (24) で定義される $F(u)$ について $F(u) = 0$ が成り立つので、そのときの u を u_1 とおくと $F(u_1) = 0$ となる。この二次方程式の解は二つ存在するが、問 8 の解答における考察にもとづくと二つの解のうち大きい方の解が求めるべき解であることがわかるので

$$u_1 = \sin \frac{x_1}{a} = -\frac{v_0^2}{2gb} + \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2b^2} - 1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad (27)$$

となる。従って

$$y_1 = -b \sin \frac{x_1}{a} = \frac{v_0^2}{2g} - \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2} - a^2 - b^2} \quad (28)$$

となる。

問 10 $x = x_1$ での曲線の第 1 次微分係数を f'_1 とおくと

$$\tan \alpha = f'_1 = -\frac{b}{a} \cos \frac{x_1}{a} \quad (29)$$

式 (27) の結果を代入し、また $\tan \alpha > 0$ より

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(-\frac{v_0^2}{2gb} + \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2b^2} - 1 - \frac{a^2}{b^2}} \right)^2} \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{2 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{v_0^4}{2g^2b^2} + \frac{v_0^2}{gb} \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2b^2} - 1 - \frac{a^2}{b^2}}} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

問 11 エネルギーの保存を考えると、 (x_1, y_1) での小球の速さを v_1 として

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}m(v_1 \cos \alpha)^2 + mgH \quad (31)$$

が成り立つ。これから

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gy_1 \quad (32)$$

となり、これを用いて

$$H = \frac{v_1^2}{2g} \sin^2 \alpha + y_1 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha + y_1 \cos^2 \alpha \quad (33)$$

となる。式 (28) を代入し、また $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ なので

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2} - a^2 - b^2} \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (34)$$

となる。問 10 の解答と組み合わせれば、 H を v_0 , g , a , b のみで表すこともできる。

問 12 $v_0 \gg \sqrt{ga}$, $v_0 \gg \sqrt{gb}$ のとき

$$\sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2b^2} - 1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{v_0^2}{2gb} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{v_0^2}{2gb} \right)^{-2} \right\}^{1/2} \doteq \frac{v_0^2}{2gb} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \left(\frac{v_0^2}{2gb} \right)^{-1} \quad (35)$$

なので、 v_0 が十分大きいとき、式 (30) から

$$\tan \alpha \doteq \frac{b}{a} \quad (36)$$

となる。

問 13 問 12 で考えた v_0 が十分大きい状況では、 $v_1 \doteq v_0$, $x_1 \doteq \pi a$, $y_1 \doteq 0$ となっているので、放物線の軌跡は、小球が曲線上を離れた瞬間の時刻を $t = 0$ として

$$x(t) = \pi a + (v_0 \cos \alpha)t \quad (37)$$

$$y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (38)$$

となる。ここから放物線の頂点を過ぎて $y = 0$ に到達する時刻 $t = t_L$ が

$$t_L = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (39)$$

と求まり、 L を

$$L = x(t_L) - 2\pi a = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - \pi a \quad (40)$$

と計算できる。問 12 の解答より $\tan \alpha \doteq \frac{b}{a}$ なので

$$\sin \alpha \doteq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (41)$$

$$\cos \alpha \doteq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (42)$$

を代入すると、 L は

$$L \doteq \frac{2v_0^2}{g} \frac{ab}{a^2 + b^2} - \pi a \quad (43)$$

となる。これを a を固定した b の関数とみると

$$\frac{dL}{db} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{a(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \quad (44)$$

となることから L は $b < a$ で b の増加関数で $b > a$ で b の減少関数となっている。したがって、 L を最大にするには $b = a$ とすればよい。

問 14 エネルギーの保存より、点 $(x, f(x))$ における小球の速さ v は

$$v^2 = v_0^2 + gd \left(1 - \cos \frac{x}{s}\right) \quad (45)$$

をみtas。これを問題文に与えられた、小球が曲線上を離れない条件である式 (15) に代入すると

$$\left(1 + \frac{d^2}{4s^2} \sin^2 \frac{x}{s}\right) g - \frac{dv^2}{2s^2} \cos \frac{x}{s} > 0 \quad (46)$$

となり

$$u = \cos \frac{x}{s} \quad (47)$$

を用いて整理すると

$$I(u) = \frac{d^2}{4s^2} u^2 - \frac{d}{2s^2} \left(\frac{v_0^2}{g} + d\right) u + 1 + \frac{d^2}{4s^2} > 0 \quad (48)$$

となる。左辺の放物線は頂点が $u = \frac{v_0^2}{gd} + 1 > 1$ かつ下に凸の放物線なので、 u が $-1 \leq u \leq 1$ の値しか取らないことに注意すると、曲線上を一度も離れることなく点 Q に到達するためには

$$I(1) > 0 \quad (49)$$

であれば良いことがわかる。具体的に計算すると

$$0 < v_0 < \sqrt{\frac{2g}{d}} s \quad (50)$$

であればよいことがわかる。

問 15 点 T における接円の偏角は明らかに $\theta = \frac{3\pi}{2}$ であり

$$f''(\pi s) = \frac{d}{2s^2} \quad (51)$$

かつ式 (11) より接円の半径は

$$R = \frac{2s^2}{d} \quad (52)$$

となることがわかる。一方、点 T における近似的な円運動の力の釣り合いより、求

める垂直抗力は点 T における小球の速さ v を用いて

$$N = mg + m \frac{v^2}{R} \quad (53)$$

と書ける。エネルギー保存則より速さ v は

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgd \quad (54)$$

を満たすので、式 (52), (53), (54) から、垂直抗力を

$$N = \left(1 + \frac{d^2}{s^2}\right) mg + \frac{d}{2s^2} mv_0^2 = m \left[g + \left(\frac{d}{s}\right)^2 \left(g + \frac{v_0^2}{2d} \right) \right] \quad (55)$$

と求めることができる。

問 16 式 (50) を d に対する条件式に書き直すと

$$d < \frac{2gs^2}{v_0^2} \quad (56)$$

となる。 $v_0 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$, $s = 1.0 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を代入して

$$d < \frac{2gs^2}{v_0^2} \doteq 0.20 \text{ m} \quad (57)$$

がくぼみの深さ d に対する条件となる。垂直抗力 N が最大となるのは d が最大となるときで、このとき垂直抗力と重力との比の概数値は

$$\frac{N}{mg} \doteq 2 + \frac{d^2}{s^2} \doteq 2.0 \quad (58)$$

となる。つまりくぼみの底でおよそ自分の体重分の力で地面に押しつけられる力がスキーヤーに瞬間的にかかる。ジェットコースターなどの場合は s に比べて d がもっと大きいのでより大きな力がかかる。

解答例：課題II

出題の意図

電場や磁場が荷電粒子による力，電気力線の保存 (ガウスの法則)，電場と電位の関係など電磁気学の基礎についての理解度を試す問題であるとともに，単振動や，極座標や微量の取り扱いに関する数学の理解および計算力を試す総合問題となっている。

問1 電位差は V_0 で距離が a なので，電場の強さは $E = V_0/a$ である。また出射面の方が電位が高いので，電場は出射面から接地面を向いている。コンデンサーの電気容量が $C = \epsilon_0 S/a$ であることを使うと $Q = CV_0 = \epsilon_0 SV_0/a = \epsilon_0 ES$ と求まる。

問2 出射面から接地面までは等加速度運動し，接地面での速度は

$$v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}} \quad (1)$$

となる。また接地面に到達するまでの時間は $2a/v$ である。接地面から検出面までは等速直線運動をするので

$$\Delta t = \frac{2a+b}{v} = (2a+b)\sqrt{\frac{m}{2qV_0}} \quad (2)$$

と求まる。これを m について解くと，

$$m = 2qV_0 \left(\frac{\Delta t}{2a+b} \right)^2 \quad (3)$$

が得られる。電圧 V_0 や装置の大きさ (a, b) は測定できるので， Δt を測定できれば質量 m が求まる。このように粒子の飛行時間から求める方法は飛行時間法 (Time of Flight, 略称 TOF 法) と名付けられている。

問3 磁場によるローレンツの力は $F = qvB$ で反時計回りに回転するよう働く。これと半径 R の円運動の遠心力 mv^2/R が釣り合うのは

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad (4)$$

ときである。これを整理すると

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (5)$$

が得られる。

R6

解答例

問4 問1で求めた速度と電圧の関係を代入すると、

$$R = \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \quad (6)$$

これを m について解くと、

$$m = \frac{qB^2R^2}{2V_0} \quad (7)$$

が得られるので、 V_0, q, B, R の値を測定できれば質量が求まることが確認できる。

問5 速度の大きさは変化しないので、軌道はやはり半径 R の円弧となる。その中心 C と点 P は距離が R で点 P での速度ベクトルと垂直な位置となる。この条件より中心 C の座標は $(x, y) = [R(1 - \cos \theta), R \sin \theta]$ と求まる。従って軌道を表す円の方程式は

$$(x - R(1 - \cos \theta))^2 + (y - R \sin \theta)^2 = R^2 \quad (8)$$

となる。式 (8) に $x = 0$ と $\cos \theta = 1$ を代入すると

$$(y - R \sin \theta)^2 = R^2 \quad (9)$$

となるので、

$$y - R \sin \theta = \pm R \quad (10)$$

が得られる。式 (10) の右辺の符号が負の場合は $y < 0$ となるので求める交点ではない。式 (10) の右辺の符号が正の場合は

$$y = R + R \sin \theta \quad \therefore R + R\theta \quad (11)$$

となるので、 $\Delta r = R\theta$ 、つまり $f(R) = R$ である。

問6 質量が $m + \Delta m$ なので、半径が

$$R' = \sqrt{\frac{2(m + \Delta m)V_0}{qB^2}} = R\sqrt{\frac{m + \Delta m}{m}} \quad (12)$$

で中心が $(x, y) = (R - R', 0)$ の円の一部が軌跡となる。ここで $|\Delta m| \ll m$ であることを注意すると

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{m + \Delta m}{m}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{\Delta m}{m}\right)^{1/2} \quad \therefore 1 + \frac{\Delta m}{2m} \quad (13)$$

が得られる。円の方程式は

$$(x + R' - R)^2 + y^2 = (R')^2 \quad (14)$$

と表され、 y 軸との交点で $y > 0$ の座標は

$$y = \sqrt{(R')^2 - (R' - R)^2} = R' = R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m} \right) \quad (15)$$

となる。 $\Delta r = \frac{\Delta m R}{2m}$ なので $h(R) = \frac{R}{2}$ である。

問 7 半径 R で円運動する荷電粒子の遠心力と、電場による力が釣り合うという条件より

$$qE_0 = \frac{mv^2}{R} \quad (16)$$

が得られるので

$$E_0 = \frac{mv^2}{qR} \quad (17)$$

である。ただし電場は z 軸を向くように加わっているので、電場ベクトルの r 成分は $-E_0$ である。

問 8 電気力線は $z = \text{一定}$ で、 z 軸へと向かう直線の一部となるため、隣り合う電気力線との間隔は r に比例する。電場は電気力線の間隔に逆比例するので、電場は $E(r) \propto r^{-1}$ となる。半径 $r = R$ での電場が $-E_0$ であることを考えると、 $a < r < b$ の範囲で

$$E(r) = -\frac{E_0 R}{r} \quad (18)$$

が得られる。また電位は

$$V(r) = -\int_a^r E(r') dr' = E_0 R \log \left(\frac{r}{a} \right) \quad (19)$$

と表される。従って円弧 ($r = b$) の内径での電位は

$$V(b) = E_0 R \log \left(\frac{b}{a} \right) \quad (20)$$

と求められる。

問 9 図 1 の装置により加速された荷電粒子は $mv^2/2 = qV_0$ の運動エネルギーを持つので、 $E_0 = 2V_0/R$ が得られる。これを式 (20) に代入すると、 $V(b) = 2V_0 \log(b/a)$ が得られる。この関係式には荷電粒子の質量 m や電荷 q が含まれない。従って電荷が $q > 0$ であれば、質量によらず出射位置が等しくなる。

問10 図6に補助線を加え図7のようにすると、面積を求める三角形は長方形から3つの三角形を差し引いたものであることがわかる。

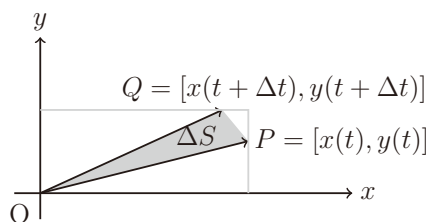


図7

図7を使うと

$$\Delta S = x(t)y(t + \Delta t) - \frac{x(t)y(t)}{2} - \frac{x(t + \Delta t)y(t + \Delta t)}{2} - \frac{(x(t) - x(t + \Delta t))(y(t + \Delta t) - y(t))}{2} \quad (21)$$

$$= \frac{x(t)[y(t + \Delta t) - y(t)]}{2} - \frac{y(t)[x(t + \Delta t) - x(t)]}{2} \quad (22)$$

$$\doteq \frac{x(t)v_y(t) - y(t)v_x(t)}{2} \Delta t \quad (23)$$

従って面積速度は

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{xv_y - yv_x}{2} \quad (24)$$

となる。途中で Δt が小さいときに成り立つ近似式を用いたが、得られた面積速度は $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で定義されるので、近似による誤差は含まれない。

面積は正に限るのが普通であるが、面積速度は反時計回りのときが正、時計回りの時が負と定義されている。

問11 面積速度の時間変化を計算すると

$$\dot{j} = xv_y - yv_x \quad (25)$$

$$\frac{dj}{dt} = \frac{dx}{dt}v_y + x\frac{dv_y}{dt} - \frac{dy}{dt}v_x - y\frac{dv_x}{dt} \quad (26)$$

が得られる。ここで $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$ である。また速度の時間変化は加速度 $(a_x, a_y) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$ と等しいことと、運動方程式

$$ma_x = \frac{qE(r)x}{r} \quad (27)$$

$$ma_y = \frac{qE(r)y}{r} \quad (28)$$

を用いると, $\frac{dj}{dt} = 0$ が得られる。

問 12 半径 r での電場による力は

$$F = -\frac{qE_0 R}{R + \Delta r} = -qE_0 \left(1 + \frac{\Delta r}{R}\right)^{-1} \doteq -qE_0 \left(1 - \frac{\Delta r}{R}\right) \quad (29)$$

である。同様に遠心力は

$$F' = \frac{mj^2}{(R + \Delta r)^3} = \frac{mj^2}{R^3} \left(1 + \frac{\Delta r}{R}\right)^{-3} \doteq \frac{mj^2}{R^3} \left(1 - 3\frac{\Delta r}{R}\right) \quad (30)$$

と求めることができる。半径 $r = R$ では電場による力と遠心力が釣り合っているの
で, $qE_0 = mj^2/R^3$ であることを使うと

$$F + F' \doteq -\frac{2qE_0}{R}\Delta r = -\frac{2mj^2}{R^4}\Delta r \quad (31)$$

が得られる。特に指示がないので,

$$\kappa = \frac{2qE_0}{R} = \frac{2mj^2}{R^4} \quad (32)$$

のいずれも正解である。ただし問 13 では j を用いた表式の方が便利である。

問 13 問 12 で求めた力は, バネ定数 κ のバネにつながれた粒子に働く力と同等である。
従って角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{2} \frac{j}{R^2} = \sqrt{2} \frac{v}{R} \quad (33)$$

と求められる。この式の最右辺に現れる $v = j/R$ は, 半径 $r = R$ での回転速度である。
半径 $r = R$ から少し斜め方向に入射した荷電粒子がはじめて半径 $r = R$ に戻る
のは, 半周期

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \quad (34)$$

経過したときである。このとき θ 方向には

$$\varphi = \frac{v}{R} \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (35)$$

だけ進む。数値を代入すると, $\varphi \doteq 127.28^\circ$ が得られる。厳密に考えると回転の速
度は r の変化とともに微妙に変化するが, $|\Delta r| \ll R$ なのでこの計算には含めなく
て良い。

入射方向が微妙に違っても出射位置が同じということは, 荷電粒子を特定の場所に

集められるということである。集めた方が検出や測定に都合が良いので，このような装置が物理や化学の実験で使われている。

R6

解答例

令和5年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理

課題I, II

(9:00-15:00)

R5
—
課題

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

半径 R の半円状の細い針金を、図 1 のように、半円が鉛直下向きになるように置いた。この針金に、小さな穴の開いた質量 m の小球を通し、針金に沿って運動できるようにした。本問題では、小球と針金の間に、**A**: 摩擦がない場合、および **B**: 摩擦がある場合のそれぞれに対して、小球の運動を調べよう。重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視できるものとして、以下の問いに答えなさい。

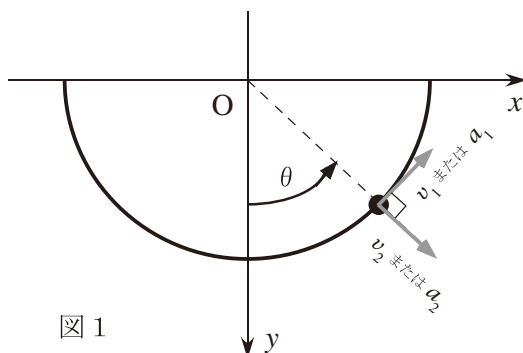


図 1

A はじめに、小球と針金の間に摩擦がない場合を考える。小球の運動を調べるために、まず、運動方程式を導こう。図 1 のように、半円の中心を原点 O として、水平右向きに x 軸を、鉛直下向きに y 軸を取り、時刻 t における小球の位置を $(x(t), y(t))$ とする。このとき、小球の x 方向の速度 v_x は、 $x(t)$ を時間 t で微分した $v_x = \frac{dx(t)}{dt}$ で、加速度 a_x は $a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ で与えられる。 y 方向も同様である。

一方、小球は円周上を動くので、円周に沿った運動を考えると便利である。時刻 t において小球は、 y 軸からの角度が θ の位置にあるとする。

問 1 円周に沿った方向の小球の速度と加速度（反時計回りを正の向きとする）をそれぞれ v_1, a_1 、円周に垂直な方向の小球の速度と加速度（円周の外方向を正の向きとする）をそれぞれ v_2, a_2 とする。このとき、例えば v_1 は、 $v_1 = v_x \cdot \cos \theta - v_y \cdot \sin \theta$ と書くことができる。同様にして v_2, a_1, a_2 のそれぞれを、 v_x, v_y, a_x, a_y 、および θ のうち必要な記号を用いて表しなさい。

小球は時刻 t と共にその位置を変えるので、 θ は時刻 t の関数 $\theta(t)$ であり、時刻 t における小球の位置は $(x(t), y(t)) = (R \sin \theta(t), R \cos \theta(t))$ と表すことができる。このとき、例えば x 方向の速度は、 $v_x = \frac{dx(t)}{dt} = R \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \cos \theta(t)$ と書くことができる。以下、簡単のために、 $\theta = \theta(t)$ 、 $\theta' = \frac{d\theta(t)}{dt}$ 、 $\theta'' = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ と書くことにする。

問2 (ア) $v_x = R\theta' \cdot \cos \theta$ と同様にして v_y , a_x , a_y のそれぞれを, R , θ , θ' , θ'' のうち必要な記号を用いて表しなさい。

(イ) 上の(ア)の答を問1の答に代入することで, v_1 , v_2 , a_1 , a_2 のそれぞれを, R , θ , θ' , θ'' のうち必要な記号を用いて表しなさい。

(ウ) 針金から小球に働く, 原点 O を向いた垂直抗力を N とする。このとき, 円周に沿った方向および円周に垂直な方向の, 時刻 t における小球の運動方程式は, それぞれ次式で与えられることを説明しなさい。

$$+mR\theta'' = -mg \sin \theta \quad (1)$$

$$-mR(\theta')^2 = +mg \cos \theta - N \quad (2)$$

次に, 円周に沿った方向の運動方程式に基づき, 小球の運動を考える。時刻 $t = 0$ に小球を角度 θ_0 (ただし $0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$) の位置から静かにはなすと, 小球は円周上を振動した。この振動の周期を考えよう。

問3 θ_0 が微小なとき θ も微小 (つまり $|\theta| \ll 1$) であり, 式(1)に示した運動方程式において $\sin \theta \doteq \theta$ と近似することができる。このときの小球の振動の周期 T_0 , および時刻 t における小球の角度 $\theta(t)$ を求めなさい。

次に, θ_0 が微小でないときの小球の振動の周期を, 近似せずに調べてみよう。時刻 $t \sim t + \Delta t$ の間に小球の角度が $\theta \sim \theta + \Delta\theta$ に変わったとすると, 小球は $R|\Delta\theta|$ 移動したことになる。このときの小球の速さは $R|\theta'|$ なので, 移動にかかった時間は $\Delta t = \frac{R|\Delta\theta|}{R|\theta'|}$ となる。ところで, 振動の1周期中に角度は, θ_0 から 0 を通って $-\theta_0$ まで変わり, さらに $-\theta_0$ から再び 0 を通って θ_0 まで変わるの, 振動の周期は, 角度が 0 から θ_0 まで変わる時間の4倍で与えられる。ゆえに, 周期 $T(\theta_0)$ は, 上記の Δt をこの時間内で足し合わせた積分の4倍となり, 積分変数 t を θ に変数変換すると, 次式の θ に関する積分で表される。

$$T(\theta_0) = 4 \int_{\frac{3}{4}T(\theta_0)}^{T(\theta_0)} dt = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{|\theta'|} d\theta \quad (3)$$

ここで $|\theta'|$ を変数 θ の関数として求めておけば, 式(3)の最右辺を使って $T(\theta_0)$ の計算ができることになる。

問4 式(3)において, 特に θ_0 が微小なときを考える。このとき, 式(3)が問3の答 T_0 を与えることを確かめよう。

(ア) 問3の答の $\theta(t)$ を用いて, t を消去し, $|\theta'|$ を, R , g , θ_0 , θ を用いて表しなさい。

- (イ) 上の(ア)の $|\theta'|$ を式(3)に代入して、このときの $T(\theta_0)$ を求めなさい。計算の過程を示すこと。

問5 今度は、 θ_0 が微小でないときを考える。

- (ア) エネルギー保存則を考えて、小球が角度 θ の位置にあるときの $|\theta'|$ を、 R, g, θ_0, θ を用いて表しなさい。
- (イ) 上の(ア)の $|\theta'|$ を式(3)に代入することで $T(\theta_0)$ の値がわかることになる。代入して、まず式(3)の被積分関数を $\sin \frac{\theta_0}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, R, g$ を用いて表しなさい。
- (ウ) 次に、変数変換 $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin \phi$ によって積分変数を θ から ϕ に変えると、 $T(\theta_0)$ は次式で与えられる。空欄□に入る式を求めなさい。

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\square}} d\phi \quad (4)$$

- (エ) 式(4)を用いて、 $T(\theta_0)$ は、 θ_0 の単調増加関数になっていることを示しなさい。
- (オ) 上の(エ)から、周期が最も長くなるのは $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ のときであることがわかる。この長さはどのくらいであろうか。式(4)の被積分関数の大きさを考えて、 $T(\theta_0 = \frac{\pi}{2}) < \sqrt{2}T_0$ となることを示しなさい。ここで T_0 は、問3で求めたものである。
- (カ) 上の(オ)では、 $T(\theta_0 = \frac{\pi}{2})$ は $\sqrt{2}T_0$ より小さいことを示したが、実は $\sqrt{2}$ より小さい正の数 s を使って、 $T(\theta_0 = \frac{\pi}{2}) < s \cdot T_0$ となることを示すこともできる。工夫して、 $\sqrt{2}$ より小さい正の数 s を求めなさい。

(次ページに続く)

B 次に、小球と針金の間に摩擦がある場合を考える。動摩擦係数を μ とすると、運動している小球には、 μN の大きさの動摩擦力が円周方向に働く。ここで、 N は針金から小球に働く垂直抗力であり、式 (2) から θ' と θ の関数として表される。

問 6 摩擦があるときの小球の円周方向の運動方程式を、 $\theta' < 0$ 、 $\theta' > 0$ のそれぞれの場
合について、 m 、 R 、 g 、 μ 、 θ 、 θ' 、 θ'' を用いて表しなさい。

時刻 $t = 0$ に小球を角度 θ_0 (ただし $0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$) の位置から静かにはなすと、小球は下に向けて動き始めた。

まず、 θ_0 が微小であり、 μ も微小な場合を考えよう。このときは、小球は円周上を振動しながら、徐々に振動の振幅を小さくした。

問 7 (ア) θ_0 および μ が微小であるとき、問 6 で求めた運動方程式において、 $\sin \theta \doteq \theta$ 、 $\cos \theta \doteq 1$ 、 $\mu(\theta')^2 \doteq 0$ と近似できるものとする。近似した方程式を参考に、 θ_0 から動き始めた小球の速度が初めて 0 となる角度 θ_1 を求めなさい。

(イ) θ_1 で速度が 0 になった小球は再び下に向けて動き、次には角度 θ_2 で速度が 0 になった。 θ_2 を求めなさい。

(ウ) 小球はこのように振動を繰り返し、 $2M$ 回目 (M は正の整数) に速度が 0 になると、以降は動くことはなかった。 $2M$ 回目に速度が 0 になった時刻 t_{2M} を求めなさい。また、静止摩擦係数を μ_0 とすると、 μ_0 の値はある範囲になければならない。その範囲を求めなさい。

今度は、 θ_0 や μ が大きい場合を考える。時刻 $t = 0$ に小球を角度 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ の位置から静かにはなすと、小球は下に向けて動き、振動せずに $\theta = 0$ で止まった。このときの μ の大きさを以下のように求めてみよう。

問 8 (ア) 問 6 で求めた運動方程式のこの場合の解は、次の式を満たすことが知られている。

$$(\theta')^2 = A \cos \theta + B \sin \theta + C e^{2\mu\theta} \quad (5)$$

式 (5) を時間 t で微分した式と問 6 の運動方程式を比べると共に、 $t = 0$ の初期条件を考慮することで、定数 A 、 B 、 C を R 、 g 、 μ を用いて表しなさい。

(イ) 小球が $\theta = 0$ で止まるために、 μ が満たすべき方程式を求めなさい。

(ウ) 電卓を用いて、上の (イ) の方程式の解 μ の概数値を、小数点以下 1 桁まで求めなさい。

[II]

空気の密度は温度 (T) や圧力 (P)、湿度 (ϕ) といった気象条件により異なる。熱気球やフェーン現象など、空気の密度変化に関連した事柄を物理の知識を使って考えよう。この設問ではモルを単位とした物質量が n 、体積が V の空気の圧力と温度は、気体定数を $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ として、理想気体の状態方程式

$$PV = nRT \quad (1)$$

に従うものとする。また重力加速度は $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ を使い、分子の質量を求める際には、表 1 に与えられた分子量を用いなさい。必要ならば、 $|x| \ll 1$ のとき任意の実数 n に対して成り立つ近似式 $(1+x)^n \doteq 1+nx$ や、 $|y| \ll 1$ かつ $|z| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1+y)(1+z) \doteq 1+y+z$ を用いなさい。

表 1: 気体分子の化学式と分子量

分子	ヘリウム	窒素	酸素	水蒸気
化学式	He	N ₂	O ₂	H ₂ O
分子量	4.00	28.0	32.0	18.0

分子量は 1 モルの分子の質量を g 単位で表した数値である。

問 1 乾燥空気は、分子数の 80.0% が窒素、20.0% が酸素からなるとする。乾燥空気の平均分子量 M を求めなさい。また圧力が $P_0 = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度が $T_0 = 300.0 \text{ K}$ のときの密度 ρ_0 を求めなさい。

問 2 同じ圧力、温度のヘリウムガスと乾燥空気の密度比 ρ_{He}/ρ_0 を求めなさい。

問 3 圧力が $P = P_0 + \Delta P$ で温度が $T = T_0 + \Delta T$ の乾燥空気の密度を $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$ とする。圧力と温度の変化が微小である ($|\Delta P| \ll P_0$, $|\Delta T| \ll T_0$) として $\Delta \rho/\rho_0$ を求めなさい。

問 4 空気の密度は湿度によっても変化する。湿度は水蒸気の分圧 (P_v) の飽和水蒸気圧 $P_{v,\text{max}}$ に対する割合 $\phi = P_v/P_{v,\text{max}}$ とする。温度 T での飽和水蒸気圧は Tetens の式、

$$P_{v,\text{max}}(T) = 1.93 \times 10^{10} \exp \left(-\frac{4.10 \times 10^3 \text{ K}}{T - 35.8 \text{ K}} \right) \text{ Pa} \quad (2)$$

により求められる。ここで $\exp(x)$ は指数関数 e^x を表す。これらの関係式を用いると、圧力が P 、温度が T 、湿度が ϕ の空気の平均分子量 M' は、 P 、 T の関数 $\alpha(P, T)$

を用いて

$$M'(P, T, \phi) = M + \alpha(P, T) \phi \quad (3)$$

と表せることを示しなさい。また $P = 1.00 \times 10^5$ Pa で $T = 290.0, 300.0, 310.0$ K の場合の α の値を符号にも注意して求めなさい。

問5 前問の結果を用い、圧力が P 、温度が T 、湿度 ϕ の場合の密度 ρ は、 P 、 T の関数 $\beta(P, T)$ を用いて

$$\rho(P, T, \phi) = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right) \left(\frac{T_0}{T} \right) [1 + \beta(P, T) \phi] \quad (4)$$

と表せることを示しなさい。また $P = 1.00 \times 10^5$ Pa で $T = 290.0, 300.0, 310.0$ K の場合の β の値を符号にも注意して求めなさい。

問4と**問5**では湿度を考慮したが、**問6**から**問9**までは空気は乾燥している ($\phi = 0$) として答えなさい。

地表面からの高さ z により圧力 $P(z)$ や温度 $T(z)$ は変化する。このことを考慮して密度 $\rho(z)$ が高さとともにどのように変化するか、以下の問いに従って考えなさい。

問6 図1に示すような底面が高さ z_0 で、上面が高さ z にある、重さのない仮想的な直方体の箱を考えよう。底面と上面の面積を S とする。この箱の空気にかかる重力が底面と上面にかかる圧力により支えられているとき、等式

$$P(z) = P(z_0) - g \int_{z_0}^z \rho(z') dz' \quad (5)$$

が成り立つことを示しなさい。

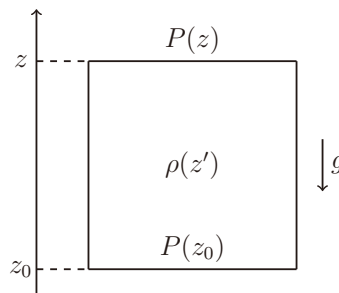


図1

問6では仮想的な箱を置いて考えたが、箱がなくても大気が静かであれば、式(5)は正しい圧力分布を与える。

問7 大気の温度が高さによらず T_0 で一定の場合、圧力の対数は

$$\frac{d}{dz} \log \left[\frac{P(z)}{P(0)} \right] = -\frac{1}{\lambda} < 0 \quad (6)$$

のように高さ z が上昇するにつれ一定の割合で減少する。式 (5) から式 (6) が導かれることを示しなさい。また $T_0 = 300.0 \text{ K}$ の場合について λ の値を求めなさい。ただし $\log$ は自然対数である。

問8 実際の大気の温度は高さ z とともに変化し、温度分布は次のように表せるとする。

$$T(z) = T(0) - \eta z \quad \text{ただし} \quad \eta = 6.00 \times 10^{-3} \text{ K/m} \quad (7)$$

式 (5) と (7) を用いて、圧力 $P(z)$ と密度 $\rho(z)$ を数式で表しなさい。また $P(0) = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T(0) = 300.0 \text{ K}$ のとき、高さ $z = 3.00 \times 10^3 \text{ m}$ の密度は $z = 0$ での密度の何%になるか求めなさい。

問9 高さが $0 \leq z \ll \lambda$ の範囲であれば、高さ z での圧力 $P(z)$ は

$$P(z) \doteq P(0) \left(1 - \frac{z}{\lambda} \right) \quad (8)$$

と近似できる。同様に高さ z での密度 $\rho(z)$ も

$$\rho(z) \doteq \rho(0) \left(1 - \frac{z}{\lambda'} \right) \quad (9)$$

と表すことができる。高さ $z = 0$ で温度が $T(0) = 300.0 \text{ K}$ である場合について λ' を求めなさい。

日が照ると、気温が上がるとともに地表面の水分が蒸発し、上昇気流が発生する。以下では、温度が上がることによる効果と水分が蒸発する効果をそれぞれ検討しよう。

問10 乾燥空気が暖められ、周囲より ΔT だけ温度が高いかたまりができた状況を考える。温められた空気は高さ $z = 0$ で周囲より密度が低い ($\Delta \rho < 0$) ので、ゆっくり上昇する。かたまりは周囲と同じ圧力を保ちながら、熱を交換することなく (断熱的に) 膨張し、上昇すると考えよう。上昇したかたまりと周囲の大気の密度が等しくなると浮力が消える。浮力が消える高さ h を求めなさい。かたまりの上昇が始まる地点での周囲の大気の圧力と温度はそれぞれ $P(0)$ と $T(0)$ とし、 $\Delta T \ll T(0)$ とする。

問11 湿った空気のかたまりには軽い水分子が含まれるため、乾燥空気より高いところまで上昇することができる。乾燥した大気の中で、高さ $z = 0$ に湿度が周囲より $\Delta \phi = 0.100$ だけ高い空気のかたまりができたとして、湿った空気の上昇を考えよ

う。高さ $z = 0$ では湿った空気のかたまりも周囲の大気も圧力は $P(0) = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、温度は $T(0) = 300.0 \text{ K}$ である。高さ $z = 0$ での湿度の変化による密度変化 ($\Delta\rho'$) と、浮力が消える高さ h' を求めなさい。湿った空気でもほとんどが窒素や酸素なので、上昇する際の密度の変化は問 10 で扱った乾燥空気と同様に計算して良い。上昇に伴い温度が下がり、飽和蒸気圧が下がるため、水蒸気の一部が水滴となることもあるが、この問題ではこの可能性を考えなくて良い。

問 12 高さ $z = 0$ での温度が $T(0) = 310.0 \text{ K}$ の場合について、問 11 と同様に $\Delta\phi = 0.100$ の湿った空気のかたまりの浮力が消える高さ h' を求めなさい。式 (8) や (9) を使用する際には $T(0) = 310.0 \text{ K}$ であることに注意しなさい。

問 13 水蒸気が水滴になると、空気の平均分子量が増加することと、凝縮熱により暖められることにより密度が変化する。凝縮熱は温度により若干異なるが、この設問では 44.0 kJ/mol で一定とする。水滴が発生した直後に空気の密度が上がるか下がるか論じなさい。凝縮熱は全て空気を暖めるために使われるとして良い。

問 14 湿った気流が山の斜面を上昇すると、山に雨を降らせ、空気は乾燥する。乾燥した気流は山の頂上を越え、反対側の斜面を降りてゆく。上昇流から下降流に転じるのは、高さ $z = 3.00 \times 10^3 \text{ m}$ で、この高さでの圧力と温度は問 8 で求めたものと等しいとする。また下降流は周囲と同じ圧力を保ち、熱を交換しないとする。下降流の圧力も高さ $z = 0$ では $P(0) = 1.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ として $z = 0$ での下降流の温度を求めなさい。

問 15 問 1 から問 14 まで学んだ知識を応用することにより説明ができる事柄を列記し、それぞれについて適切な説明を与えなさい。関連するものであれば、例は気象に限る必要はない。

解答例: Tetens の式に 温度 $100 \text{ }^\circ\text{C}$ (373.15 K) を代入すると、 $P_{v,\max} = 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}$ が得られる。この飽和水蒸気圧は、1 気圧では $100 \text{ }^\circ\text{C}$ で水が沸騰することを表している。

令和5年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理 課題I, II

解答例

R5

解答例

解答例：課題I

出題の意図

本問題は、半円上を動く小球の運動を調べる力学の問題です。高校の物理でもこうした運動の一部を学びますが、本問題ではそこから少し進んで、振幅が大きくなるときに周期は単振動からどのように変わるか、摩擦があるときに振動はどうなるかを考えます。高校の微積分が理解できていれば、指示に従い順次解答できるように出題されています。この問題により、運動方程式を中心とした力学の基本的な考え方や関連する数理能力、大学に入って教科書を読み進めることができるか等の能力を問います。

問1 図を描いて射影を考えることで、次式が求まる。

$$(v_1 = v_x \cdot \cos \theta - v_y \cdot \sin \theta) \quad (1)$$

$$v_2 = v_x \cdot \sin \theta + v_y \cdot \cos \theta \quad (2)$$

加速度も同様に、次式が求まる。

$$a_1 = a_x \cdot \cos \theta - a_y \cdot \sin \theta \quad (3)$$

$$a_2 = a_x \cdot \sin \theta + a_y \cdot \cos \theta \quad (4)$$

問2 (ア) 与えられた式を t で1回および2回微分することにより、次式が求まる。

$$(v_x = R\theta' \cdot \cos \theta) \quad (5)$$

$$v_y = -R\theta' \cdot \sin \theta \quad (6)$$

$$a_x = R\theta'' \cdot \cos \theta - R\theta'^2 \cdot \sin \theta \quad (7)$$

$$a_y = -R\theta'' \cdot \sin \theta - R\theta'^2 \cdot \cos \theta \quad (8)$$

(イ) 上の(ア)の答を問1の答に代入すると、

$$v_1 = R\theta' \quad (9)$$

$$v_2 = 0 \quad (10)$$

$$a_1 = R\theta'' \quad (11)$$

$$a_2 = -R(\theta')^2 \quad (12)$$

が得られる。

(ウ) 左辺は ma_1 , ma_2 で、上の(イ)の加速度を代入したもの。右辺の第1項は重力の円周に沿った方向及び円周に垂直な方向への射影、第2項は垂直抗力。こう

して問題文の式 (1), (2) を得る。

問 3 近似して,

$$\theta'' = -\frac{g}{R}\theta \quad (13)$$

を得る。これは単振動なので, $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ とすると,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad (14)$$

また,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad (15)$$

を得る。

問 4 (ア) 問 3 の答を代入して, 次式が求まる。

$$|\theta'| = |-\omega\theta_0 \sin(\omega t)| = \omega\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \quad (16)$$

(イ) (ア) の答を問題文の式 (3) に代入して,

$$T(\theta_0) = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\omega\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} d\theta \quad (17)$$

を得る。ここで $\theta = \theta_0 \sin \psi$ と変数変換すると,

$$T(\theta_0) = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\theta_0 \cos \psi} \theta_0 \cos \psi d\psi = \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \quad (18)$$

と, 問 3 と同じ答になっている。

問 5 (ア) エネルギー保存:

$$\frac{m}{2}(R\theta')^2 - mgR \cos \theta = 0 - mgR \cos \theta_0 \quad (19)$$

から,

$$(\theta')^2 = \frac{2g}{R}(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (20)$$

故に, 次式が求まる。

$$|\theta'| = \sqrt{\frac{2g}{R}(\cos \theta - \cos \theta_0)} \quad (21)$$

R5

解答例

(イ) (ア) の答を問題文の式 (3) に代入して,

$$T(\theta_0) = 4 \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{R}{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta \quad (22)$$

半角に直して, 次式が求まる。

$$T(\theta_0) = 4 \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{R}{4g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta \quad (23)$$

(ウ) $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin \phi$ のように $\theta \rightarrow \phi$ と変数変換すると,

$$T(\theta_0) = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin^2 \phi}} d\phi \quad (24)$$

を得る。故に, 空欄に入る式は $\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin^2 \phi$ 。

(エ) $\sin \frac{\theta_0 + \delta}{2} > \sin \frac{\theta_0}{2}$ なので,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0 + \delta}{2} \cdot \sin^2 \phi}} > \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin^2 \phi}} \quad (25)$$

を得る。故に $T(\theta_0 + \delta) > T(\theta_0)$ となり単調増加。

(オ) $4 \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{2}{\pi} T_0$ なので, $T(\theta_0)$ の上限は,

$$T(\theta_0 = \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \phi}} \quad (26)$$

ここで, $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ で被積分関数 $< \sqrt{2}$ なので, $T(\theta_0 = \frac{\pi}{2}) < \frac{2}{\pi} T_0 \cdot \sqrt{2} \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} T_0$ となる。

(カ) 例えば, ϕ の積分を, $\phi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ で $\frac{\pi}{6}$ 幅の 3 領域に区切ると, それぞれの領域で被積分関数は定数 $\sqrt{\frac{8}{7}}, \sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{2}$ で押さえられ, $< \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{2} \right\} T_0 \doteq 1.25 T_0$ と範囲が絞られる。(楕円関数値表を見ると上限は $\leq 1.18 T_0$ ぐらいになる)

問 6 抗力 N は, 問題文の式 (2) より $N = mR(\theta')^2 + mg \cos \theta > 0$ 。これを代入して, 運

動方程式は、 $\theta' > 0$ なら、

$$mR\theta'' = -mg \sin \theta - \mu [mR(\theta')^2 + mg \cos \theta] \quad (27)$$

となり、 $\theta' < 0$ なら、動摩擦力の符号を変えて、

$$mR\theta'' = -mg \sin \theta + \mu [mR(\theta')^2 + mg \cos \theta] \quad (28)$$

を得る。

問 7 (ア) 初めは時計方向に動き $\theta' < 0$ なので、方程式を近似すると、

$$mR\theta'' = -mg\theta + \mu mg \quad (29)$$

つまり、

$$\theta'' = -\omega^2(\theta - \mu) \quad (30)$$

を得る。これは $\theta = \mu$ 中心の単振動。振幅は $\theta_0 - \mu$ なので、

$$\theta_1 = \mu - (\theta_0 - \mu) = -\theta_0 + 2\mu \quad (31)$$

で速度が 0 になる。

(イ) 今度は反時計方向で $\theta' > 0$ なので、方程式を近似すると、

$$mR\theta'' = -mg\theta - \mu mg \quad (32)$$

つまり、

$$\theta'' = -\omega^2(\theta + \mu) \quad (33)$$

を得る。これは $\theta = -\mu$ 中心の単振動。振幅は $-\mu - \theta_1 = \theta_0 - 3\mu$ なので、

$$\theta_2 = -\mu + (\theta_0 - 3\mu) = \theta_0 - 4\mu \quad (34)$$

で速度が 0 になる。

(ウ) 以上のように、振動は $\theta = \pm\mu$ 中心に交互におきながら、各振動の振動数は ω と変わらない。故に、 $t_{2M} = 2M \cdot \frac{T_0}{2} = MT_0$ 。また、一回振動するごとに速度が 0 になる位置は、 4μ ずつ $\theta = 0$ に近づく。ところで静止摩擦力が重力の接線方向成分以上となる条件は、 $mg \sin \theta \leq \mu_0 \cdot mg \cos \theta$ 、つまり $\mu_0 \geq \tan \theta$ 、逆に小さい条件は不等号が逆。これから、 $|\tan \theta_{2M-1}| > \mu_0 \geq \tan \theta_{2M}$ なら良い。 θ_{2M}

R5

解答例

等は小さいので $\tan \theta_{2M} \simeq \theta_{2M}$ 等を代入すると,

$$\theta_0 - 4M\mu + 2\mu > \mu_0 \geq \theta_0 - 4M\mu \quad (35)$$

となる。

問 8 (ア) 初期条件 ($\theta = \frac{\pi}{2}$ で $\theta' = 0$) から, $C = -Be^{-\mu\pi}$ 。問題文の式 (5) を微分して

$$2\theta'\theta'' = \theta'(-A \sin \theta + B \cos \theta + 2\mu C e^{2\mu\theta}) \quad (36)$$

両辺を θ' で割り, θ'' に問 6 の運動方程式を, $(\theta')^2$ に問題の式を代入して, θ の恒等式として両辺を比較することで,

$$A = \frac{2g}{R} \cdot \frac{1 - 2\mu^2}{4\mu^2 + 1} \quad (37)$$

$$B = \frac{2g}{R} \cdot \frac{3\mu}{4\mu^2 + 1} \quad (38)$$

$$C = -\frac{2g}{R} \cdot \frac{3\mu}{4\mu^2 + 1} e^{-\mu\pi} \quad (39)$$

と求まる。

(イ) $\theta = 0$ で $v = 0$, つまり $\theta' = 0$ なので, (ア) の答を用いると

$$0 = (\theta')^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{(1 - 2\mu^2) - 3\mu \cdot e^{-\mu\pi}}{4\mu^2 + 1} \quad (40)$$

つまり,

$$1 - 2\mu^2 = 3\mu \cdot e^{-\mu\pi} \quad (41)$$

が求める方程式。

(ウ) 電卓で (イ) の答の左右の式を数値で計算し, 比較すれば, 概数値は $\mu \simeq 0.6$ (図 1, 図 2)。

μ	$1-2\mu^2$	$3\mu e^{-3.14\mu}$				
0.1	0.98	0.2192				
0.2	0.92	0.3202				
0.3	0.82	0.3509		μ	$1-2\mu^2$	$3\mu e^{-3.14\mu}$
0.4	0.68	0.3417		0.58	0.3272	0.2816
0.5	0.5	0.3121		0.59	0.3038	0.2776
0.6	0.28	0.2736 ★		0.6	0.28	0.2736
0.7	0.02	0.2332		0.61	0.2558	0.2695
0.8	-0.28	0.1947		0.62	0.2312	0.2655
0.9	-0.62	0.1600		0.63	0.2062	0.2614
1	-1	0.1298				

図 1: 問 8(イ) の答の方程式の左・右辺の各 μ での値。 $\mu \rightleftharpoons 0.6$ で両辺が近い値になる。

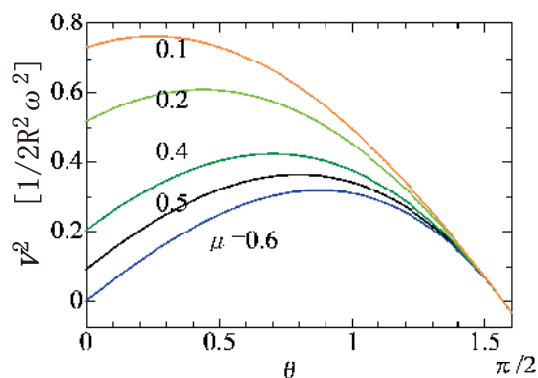


図 2: 様々な動摩擦係数 μ に対する、角度 θ における小球の速度の 2 乗 v^2 ($2R^2\omega^2$ を単位として)。問題文の式 (5) をグラフにしたもの。 $\mu \rightleftharpoons 0.6$ で $\theta = 0$ に止まることが分かる。

R5

解答例

補足

- $\theta'(t)$ を θ の関数 $\theta'(\theta)$ と見ると, $\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\theta')^2}{d\theta}$ なので, 運動方程式は

$$\frac{d(\theta')^2}{d\theta} - 2\mu(\theta')^2 = -\omega^2(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (42)$$

となり, これは $(\theta')^2$ の非斉次 1 階微分方程式なので定数変化法で積分でき, 初期条件を θ_0 で $(\theta'_0)^2$ とすると, 解は

$$\begin{aligned} (\theta')^2 = & \frac{2\omega^2}{4\mu^2 + 1} \{ (1 - 2\mu^2) \cos \theta + 3\mu \sin \theta - e^{-2\mu\theta_0} ((1 - 2\mu^2) \cos \theta_0 + 3\mu \sin \theta_0) \cdot e^{2\mu\theta} \} \\ & + (\theta'_0)^2 e^{-2\mu\theta_0} \cdot e^{2\mu\theta} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。ここに $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ で $\theta'_0 = 0$ を代入したのが問題文の式 (5)。

- 問題文の式 (5) には 3 つの定数がある。1 階微分方程式で初期条件から C が決まる。非斉次項による特解は独立な 2 つの関数 $\sin \theta, \cos \theta$ を含むので, それぞれの項を比較することで, 2 つの定数 A, B も決めることができた。
- エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2(\theta) - mgR \cos \theta = 0 - mgR \cos \theta_0 + W \quad (44)$$

ここで W は小球が針金にした摩擦の仕事 (エネルギー) で,

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \mu \left(mg \cos \psi + m \frac{v^2(\psi)}{R} \right) R d\psi \quad (45)$$

となる。ここで $V^2(\theta) \equiv \frac{v^2(\theta)}{gR}$ とおくと, この式は

$$V^2(\theta) = 2(\cos \theta - \cos \theta_0) + \mu \int_{\theta_0}^{\theta} d\psi \{ \cos \psi + V^2(\psi) \} \quad (46)$$

の積分方程式となる。ここで, μ が小さいとして, μ に対し 0 次 of $V^2(\theta) = 2(\cos \theta - \cos \theta_0)$ を積分内に代入して積分すると,

$$V^2(\theta) = 2(\cos \theta - \cos \theta_0) + 3\mu(\sin \theta - \sin \theta_0) - 2\mu(\theta - \theta_0) \cos \theta_0 \quad (47)$$

となる。ちなみに, この式は, 式 (43) を $\theta'_0 = 0$ として μ で 1 次まで展開しても得られる。止まる位置を $\theta_1 = -\theta_0 + \varepsilon$ (ただし ε は μ の order で小さい) とし, $V(\theta_1) = 0$

なので，上式を ε の 1 次までで展開すると，

$$\varepsilon = \mu \left(6 - \frac{4\theta_0 \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right) \quad (48)$$

となる。 θ_0 が小さいときは $\varepsilon \doteq 2\mu$ となり問 7(ア) の答となる。一方，問 8 のように θ_0 が $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ と大きいときは， $\varepsilon \doteq 6\mu$ となり，振幅の減衰幅は θ_0 が大きくなるにつれて大きくなることが分かる。このように，振幅の減衰幅は，摩擦によるエネルギーを考えても導き出せるが，計算は運動方程式から考えるよりも少し複雑である。

R5

解答例

解答例：課題II

出題の意図

気体の性質についての理解度ならびに、指数関数や微積分に関する習熟度を試す問題になっています。最後の設問では身の回りの気象や水の性質を科学的な目で捉える力を試しています。

問1 問題に与えられた条件より空気の平均分子量は

$$M = 28.0 \times 0.800 + 32.0 \times 0.200 = 28.8 \quad (1)$$

である。ここで用いた分子量 M は1モル当たりの質量を g 単位で測った数値であるため、kg を質量の単位とする SI 単位系では $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ に換算して計算しなくてはならない。この解答例では $\tilde{M} = 10^{-3} M \text{ kg/mol}$ を用い、数式が煩雑となるのを防ぐ。乾燥空気の場合、 $\tilde{M} = 2.88 \times 10^{-2} \text{ kg/mol}$ である。

理想気体の状態方程式を利用すると乾燥空気の密度は

$$\rho_0 = \frac{n\tilde{M}}{V} = \frac{\tilde{M}P_0}{RT_0} = 1.16 \text{ kg/m}^3 \quad (2)$$

のように求められる。

問2 単位体積あたりの分子数はヘリウムガスも同じであることに注意すると、

$$\frac{\rho_{\text{He}}}{\rho_0} = \frac{4.00}{28.8} = 0.139 \quad (3)$$

ヘリウムガスの入った風船が強く浮き上がるのはこのためである。

問3

$$\rho_0 + \Delta\rho = \frac{\tilde{M}P}{RT} = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^{-1} \quad (4)$$

なので、与えられた近似式を用いると

$$\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta P}{P_0} - \frac{\Delta T}{T_0} \quad (5)$$

が得られる。

問4 気体の圧力は分子の数に比例する。従って湿ったモル数 n の空気に含まれる水蒸気

のモル数 $n_{\text{H}_2\text{O}}$ は

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\phi P_{v,\max}(T)}{P} n \quad (6)$$

となる。従って湿った空気の平均分子量は

$$M' = 28.8 + (18.0 - 28.8) \frac{\phi P_{v,\max}(T)}{P} \quad (7)$$

と表すことができる。整理すると

$$\alpha(P, T) = -10.8 \frac{P_{v,\max}(T)}{P} \quad (8)$$

と表すことができる。指示された圧力と温度での値は以下の通りである。

$$\alpha = \begin{cases} -2.06 \times 10^{-1} & (T = 290.0 \text{ K}) \\ -3.80 \times 10^{-1} & (T = 300.0 \text{ K}) \\ -6.69 \times 10^{-1} & (T = 310.0 \text{ K}) \end{cases} \quad (9)$$

問 5 湿っている場合は平均分子量が 28.8 から前問の式で表される形に変わることを利用すると

$$\beta(P, T) = \frac{\alpha(P, T)}{28.8} = -0.375 \frac{P_{v,\max}(T)}{P} \quad (10)$$

であることが分かる。数値を代入すると

$$\beta = \begin{cases} -7.16 \times 10^{-3} & (T = 290.0 \text{ K}) \\ -1.32 \times 10^{-2} & (T = 300.0 \text{ K}) \\ -2.32 \times 10^{-2} & (T = 310.0 \text{ K}) \end{cases} \quad (11)$$

となる。

問 6 箱に上向きに働く力は $P(z_0)S$ である。下向きに働く力は $P(z)S$ と重力である。箱の中にある空気の質量は

$$m = S \int_{z_0}^z \rho(z') dz' \quad (12)$$

であることを考えると力の釣り合いから

$$P(z_0)S = P(z)S + gS \int_{z_0}^z \rho(z') dz' \quad (13)$$

が得られる。この式の両辺を S で割り、移項すると問題文に与えられた条件 (5) が

R5

解答例

求まる。

問7 問6で与えられた式(5)の両辺を z で微分すると

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (14)$$

が得られる。これに $\rho = n\tilde{M}/V$ と理想気体の状態方程式を代入すると

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\tilde{M}Pg}{RT} \quad (15)$$

が得られる。両辺を P で割ると、

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = \frac{d}{dz} \log \left[\frac{P(z)}{P(0)} \right] = -\frac{\tilde{M}g}{RT} = -\frac{1}{\lambda} \quad (16)$$

が得られる。温度 $T = T_0 = 300.0$ Kの場合、 $\lambda = 8.83 \times 10^3$ mとなる。

問8 温度が高さにより変化する場合、前問で求めた方程式は

$$\frac{d}{dz} \log \left[\frac{P(z)}{P(0)} \right] = -\frac{\tilde{M}g}{RT(z)} = -\frac{\tilde{M}g}{R[T(0) - \eta z]} \quad (17)$$

と書き換えることができる。左辺と右辺を $z = 0$ から積分すると

$$\log \left[\frac{P(z)}{P(0)} \right] = \frac{\tilde{M}g}{\eta R} \log \left[1 - \frac{\eta z}{T(0)} \right] \quad (18)$$

が得られる。整理すると

$$P = P(0) \left[1 - \frac{\eta z}{T(0)} \right]^{\tilde{M}g/(\eta R)} \quad (19)$$

が得られる。密度は

$$\rho = \frac{\tilde{M}P}{RT} = \rho(0) \left[1 - \frac{\eta z}{T(0)} \right]^{\tilde{M}g/(\eta R)-1} \quad (20)$$

数値を代入すると $z = 3000$ mでの圧力は $0.70451 P(0)$ 、密度は $0.74948 \rho(0)$ となるので、密度は $z = 0$ での値の74.9%である。

問9 前問で求めた式(20)を近似すると、

$$\rho(z) = \rho(0) \left[1 - \left(\frac{\tilde{M}g}{R} - \eta \right) \frac{z}{T(0)} \right] \quad (21)$$

R5

解答例

が得られるので、

$$\lambda' = T(0) \left(\frac{\tilde{M}g}{R} - \eta \right)^{-1} = 1.0728 \times 10^4 \text{ m} \quad (22)$$

が得られる。有効数字3桁にすると $\lambda' = 1.07 \times 10^4 \text{ m}$ となる。ただし問10で λ との差を計算する際には $1.073 \times 10^4 \text{ m}$ として計算した方がよい。

問10 2原子分子である空気では定積比熱は $C_V = (5/2)R$ 、定圧比熱は $C_P = (7/2)R$ でその比は $C_P/C_V = 7/5$ である。このため、断熱的に膨張すると、その圧力と体積は

$$PV^{7/5} = \text{一定} \quad (23)$$

に従って変化する。ここで ρV も一定に保たれることに注意すると、密度は

$$\rho \propto P^{5/7} \propto \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{5/7} \quad (24)$$

に従って、高さとともに減少してゆく。問3で求めた温度の上昇による密度変化も考慮すると上昇する空気の密度は

$$\rho(z) = \rho(0) \left[1 + \frac{\Delta T}{T(0)}\right]^{-1} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{5/7} \quad (25)$$

$$\doteq \rho(0) \left[1 - \frac{\Delta T}{T(0)} - \frac{5}{7} \frac{z}{\lambda}\right] \quad (26)$$

により表される。問9の式(9)を用いると、周囲の大気と密度が等しくなる条件

$$\frac{\Delta T}{T(0)} + \frac{5}{7} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \quad (27)$$

が得られる。整理すると

$$h = \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{5}{7\lambda}\right)^{-1} \frac{\Delta T}{T(0)} = \left(\frac{2\tilde{M}g}{7R} - \eta\right)^{-1} \Delta T = 2.70 \times 10^2 \left(\frac{\Delta T}{1 \text{ K}}\right) \text{ m} \quad (28)$$

が得られる。

問11 湿度による密度変化は

$$\Delta\rho' = \beta\Delta\phi\rho(0) \quad (29)$$

と表すことができる。上昇による密度変化は乾燥空気と同じとして良いので、上昇

する湿った空気の密度は

$$\rho(z) \doteq \rho(0) \left(1 + \beta \Delta\phi - \frac{5}{7} \frac{z}{\lambda} \right) \quad (30)$$

と変化する。周囲と同じ密度になるのは

$$h' = - \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{5}{7\lambda} \right)^{-1} \beta \Delta\phi \quad (31)$$

である。数値を代入すると $h' = 107 \text{ m}$ が得られる。

問 12 問 11 で求めた数式に高さ $z = 0$ での温度 310.0 K を用いて計算すると, $h' = 194 \text{ m}$ と 300.0 K の時よりずいぶん高くなる。湿度の変化は $\Delta\phi = 0.100$ で同じでも, 温度が高くなると飽和水蒸気圧が高くなり, 密度の変化が大きくなるためである。

問 13 水蒸気が水滴になると, 空気の平均分子量が大きくなる。湿った空気 1 モルの中の水蒸気 Δx モルが乾燥空気と置き換わることにより分子量は

$$\Delta M = (28.8 - 18.0) \Delta x \quad (32)$$

だけ変化する (問 4 の答)。圧力と温度が変化しないなら, 個数密度も変化しないので, 密度変化と平均分子量の変化は等しくなる。

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\Delta M}{M} = 0.375 \Delta x \quad (33)$$

しかし凝縮熱が加わることにより

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{C_P} = \frac{2\Delta Q}{7R} = 1.51 \times 10^3 \Delta x \text{ K} \quad (34)$$

だけ温度が上昇する。この温度上昇による密度変化は問 3 より

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -5.04 \Delta x \quad (35)$$

となる。温度上昇による密度低下の方が, 凝縮による密度増加を上回る。したがって飽和水蒸気圧に達したのちも, 水蒸気の一部が水滴に変わりながら密度が下がり上昇を続ける。

この問題では温度変化を定圧比熱で論じるべきであるが, 定積比熱 $C_V = (5/2)R$ を用いても結論は変わらないので大きな減点にはしない。

問 14 問 10 で用いた断熱変化の式に理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ を代入して V を消

去すると、

$$PV^{7/5} = P^{-2/5} (nRT)^{7/5} = \text{一定} \quad (36)$$

が得られる。従って断熱変化している気体の圧力と温度の間には

$$T(0) = T(3.00 \times 10^3 \text{ m}) \left[\frac{P(0)}{P(3.00 \times 10^3 \text{ m})} \right]^{2/7} \quad (37)$$

という関係式が成り立つ。これに数値を代入すると $T(0) = 312 \text{ K}$ が得られる。これは 39°C と高温である。

問 15 たとえば次のような事柄を論じることを期待している。

- 夏、太陽により暖められた空気が上昇するのは、単に温度が高くなるだけでなく、湿気を含みやすくなるからである。温度上昇による密度変化より、水分子が空気より軽いことと、水分子が水滴になる際の凝縮熱により温度が上がることで上昇気流を発生させるのに重要である。
- 湿った空気が上昇しやすいのは温度が 30°C ($= 303.15 \text{ K}$) より暑いときである。Tetens の式によれば温度が高くなればなるほど、飽和水蒸気圧が高くなり、空気の絶対湿度が高くなりやすく、密度も乾燥しているときより低くなりやすい。このようなときほど、強い上昇気流が発生しやすい。またその水蒸気が水滴に戻る際の凝縮熱が上昇気流を加速させる要因である。
- 解答例の議論を進めると、高山の気圧の低いところではより低温で水が沸騰することや、圧力釜では高い温度で煮えることを理解できる。たとえば問 8 で考えた高さ $3 \times 10^3 \text{ m}$ での気圧と飽和蒸気圧が等しくなる ($P_{v,\max} = 7 \times 10^4 \text{ Pa}$) のは 90°C というように沸点を求めることができる。
- 高さによる温度の低下率 $\eta = 6.00 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ は適当な値になるように調節されているらしい。もしこれより急激に温度が下がるなら、一度暖められた空気は途中で止まることなく上昇を続ける。しかし温度勾配がずっと緩いと、蒸発熱を考えても上昇流は起こらなくなる。上昇流がなくなると、大気の循環はずっと遅くなり、現在とは全く異なる気象になるだろう。

R5

解答例

令和4年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理

課題I, II

(9:00-15:00)

R4
—
課題

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

図1のように、エレベータ内に、質量の無視できる自然長 L 、ばね定数 k のばねがつり下げられている。エレベータ内で鉛直上向きを正として z 軸を考える。天井から鉛直下向きに L だけ下がった位置を座標原点 O とする。(原点 O はエレベータとともに動くものとする。) ばねの先端に質量 m の小球を取り付ける。小球の時刻 t での位置を $z(t)$ と表す。最初、エレベータは動いておらず、小球はつり合いの位置 $z = z_0$ で静止しており、これを「最初の状態」とする。重力加速度の大きさを g とし、空気抵抗は無視でき、小球は鉛直方向のみに運動し、エレベータの天井や床に衝突することはないものとして、以下の問いに答えなさい。

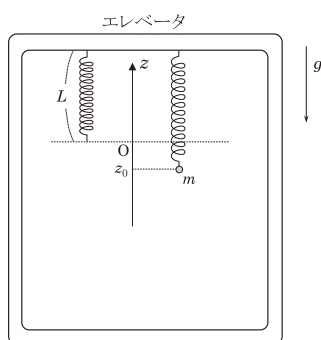


図 1

問 つり合いの位置 z_0 を求めなさい。

これ以後の問題 [I]-A～[I]-D で考える運動は全て、上記の「最初の状態」から始まるものとする。

[I]-A

「最初の状態」から鉛直方向にわずかに離れた位置 $z = z_1$ に小球を移動させ、時刻 $t = 0$ において静かに放した。

問1 小球の加速度を a とする。小球に対して成り立つ運動方程式を m, k, z, a, g のうち必要な記号を用いて表しなさい。

加速度 a は、 z ($= z(t)$) の第2次導関数 (2階微分) $\frac{d^2 z}{dt^2}$ と等しい。また、小球の速度は、 z の第1次導関数 $\frac{dz}{dt}$ と等しい。一般に、第2次導関数 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ が定数 ω , x_0 に対して、方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 (x - x_0) \quad (1)$$

を満たす場合、この方程式の解は、定数 A, B を用いて、

$$x(t) = x_0 + A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2)$$

で与えられ、単振動を表すことが知られている。

問2 前問の運動方程式を式 (1) のように変形し、 ω を求めなさい。ただし、 $\omega > 0$ とする。また、振動の周期 T を求めなさい。

問3 $t = 0$ における小球の位置と速度に注目して、 $z(t)$ を z_0, z_1, ω, t を用いて表しなさい。

[I]-B

「最初の状態」の後、時刻 $t = 0$ からエレベータが鉛直上方に一定の加速度 α_0 で移動する場合を考える。

問1 時刻 $t = 0$ 以降のある時刻 t に、エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合、小球に対して成り立つ運動方程式を表しなさい。

問2 前問の運動方程式を解き、小球の時刻 t での位置 $z(t)$ を求めなさい。

問3 エレベータのみの質量を M とする。前問で求めた小球の位置（運動）を考慮した上で、エレベータが等加速度運動するために、エレベータに加えるべき外力 F を t の関数として求めなさい。

[I]-A の問2 で求めた T に対して、時刻 $t = \frac{3T}{4}$ において、エレベータの加速度は0となり、その後エレベータはそのまま等速直線運動を続けた。

問4 時刻 $t = \frac{3T}{4}$ 以降、エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合、小球はどのような運動をするか、答えなさい。

問5 $\alpha_0 = g$ のとき、時刻 $t = 0$ から $3T$ までの間の $z(t)$ のグラフを描きなさい。

時刻 $t = 0$ から t_0 （ただし、 $t_0 \neq \frac{3T}{4}$ ）まではエレベータが鉛直上方に一定の加速度 α_0 で移動し、時刻 $t = t_0$ 以降はエレベータの加速度が0となり、その後エレベータがそのまま等速直線運動を続けた場合を考える。

問6 時刻 $t = t_0$ 以降、エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合、小球が静止し続けるような t_0 が存在するか、答えなさい。 t_0 が存在する場合、具体的な表式を求めなさい。

[I]-C

図2のように、エレベータの外で静止している観測者から見た鉛直上向きの座標系 Z を考えてみよう。この座標系でのエレベータの天井と小球の座標をそれぞれ Z_E , Z_P とする。「最初の状態」の後、時刻 $t = 0$ からエレベータが一定の外力 F_0 により鉛直上向きに運動する場合を考える。ただし、時刻 $t = 0$ において $Z_P = 0$ とする。また、エレベータのみの質量は以下においても M とする。

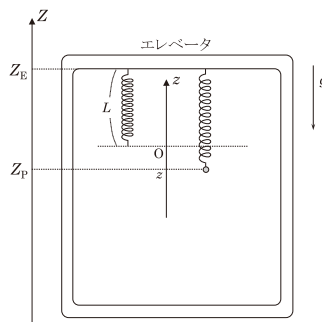


図 2

問 1 時刻 $t = 0$ における Z_E を求めなさい。

問 2 この座標系での、ある時刻 t におけるエレベータと小球の運動方程式をそれぞれ表しなさい。

座標 Z_G を $\frac{MZ_E + mZ_P}{M + m}$ とする。また、ばねの伸びは $Z_R = Z_E - Z_P - L$ と表すことができる。

問 3 速度 $\frac{dZ_G}{dt}$ が $t > 0$ で常に正となる条件を求めなさい。

問 4 問 2 の運動方程式を Z_G と Z_R に関する方程式に変形し、それぞれの方程式を解くことにより、ある時刻 t におけるエレベータの座標 Z_E を求めなさい。

[I]-D

再び、エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測する場合を考えよう。「最初の状態」の後、時刻 $t = 0$ 以降エレベータは鉛直方向に加速度 $\alpha(t) = \alpha_1 \sin \omega_0 t$ で動くものとする。また、 ω_0 は A-問 2 で求めた ω とは異なるものとする。

一般に、変数 x が定数 ω , ω_0 , x_0 , D に対して、方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0) + D \sin \omega_0 t \quad (3)$$

を満たす場合、この方程式の解は、定数 A , B , C を用いて、

$$x(t) = x_0 + A \cos \omega t + B \sin \omega t + C \sin \omega_0 t \quad (4)$$

と表すことができることが知られている。ただし、定数 C は式 (4) において $A = B = 0$ とした式を方程式 (3) に代入し、係数を比較することで決定する。

問 1 時刻 $t = 0$ 以降のある時刻 t に、エレベータとともに移動する観測者が小球の運動を観測した場合の、小球に対して成り立つ運動方程式を表し、小球の時刻 t での位置 $z(t)$ を求めなさい。

問 2 前問の結果に対して、 $\omega_0 \ll \omega$, $\omega_0 \gg \omega$, $\omega_0 \doteq \omega$ の場合の小球の運動をそれぞれ考察しなさい。必要があれば、次の近似式を用いなさい。

$|\theta| \ll 1$ のとき、

$$\sin \theta \doteq \theta$$

$$\cos \theta \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

ここで、「最初の状態」の後、エレベータを静止させたままとした。空気抵抗とは異なるエレベータ内での小球の速度に比例する抵抗力（比例定数を $-2m\gamma$ とする）を小球に与える、質量の無視できる機構を取り付けた。その後、つり合いの位置 z_0 からわずかに離れた位置 z_1 に小球を移動させ、時刻 $t = 0$ において静かに放した。

一般に、変数 x が定数 ω , x_0 , γ に対して、方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0) - 2\gamma\frac{dx}{dt} \quad (5)$$

を満たす場合、この方程式の解は、定数 A , B と自然対数の底 e を用いて、

$$x(t) = x_0 + e^{-\gamma t}(A \cos \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + B \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \quad (\gamma < \omega) \quad (6)$$

$$x(t) = x_0 + e^{-\gamma t}(At + B) \quad (\gamma = \omega) \quad (7)$$

$$x(t) = x_0 + e^{-\gamma t}(Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t}) \quad (\gamma > \omega) \quad (8)$$

と表すことができることが知られている。

問3 小球はどのような運動をするか、答えなさい。

問4 最後に、ある時刻 $t = t_1$ （ただし、 $t_1 > 0$ ）以降、エレベータを鉛直上方に加速度 $\alpha(t) = \alpha_1 \sin \omega_0 t$ で移動させた。エレベータとともに移動する観測者が時刻 $t = t_1$ 以降に観測した小球の運動と類似の物理量の時間変化を、その他の物理現象においても見出すことができる。どのような物理現象が考えられるか、答えなさい。該当の物理現象を説明するための物理量を適宜定義したり、図（どのような構成で題意を満たすのかを示すもの）を描いたりして説明しなさい。

[II]

反射や屈折による光線の曲がりは、さまざまな方法により求めることができる。このことを確かめたのち、重力による光線の曲がり (重力レンズ効果) について考えてみよう。

問1 大型の光学望遠鏡では、集光のために表面が放物面¹となる反射鏡が用いられている。

図1を参考にして、光軸が $x = y = 0$ で、反射面が

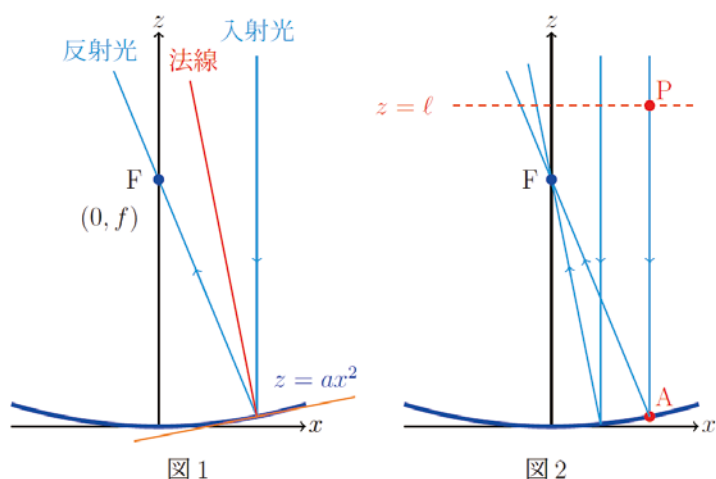
$$z = a(x^2 + y^2) \quad (1)$$

で表される鏡 (ただし $a > 0$) に、 $z = +\infty$ から、 $(x, y) = (b, 0)$ の直線に沿って入射する光を考えよう。入射光も反射光も $y = 0$ の面内にあり、それらのなす角の2等分線は鏡面に垂直となる。入射光は $x = b$, 2等分線 (法線) と反射光は媒介変数 t を用いて

$$\text{2等分線 (法線):} \quad (x, z) = (ct + b, t + ab^2) \quad (2)$$

$$\text{反射光:} \quad (x, z) = (c't + b, t + ab^2) \quad (3)$$

と表すことができる。変数 c, c' を a, b を用いて表しなさい。



問2 反射光と $x = 0$ 平面の交点 F の z 座標 f を求め、その値は b によらないことを確認しなさい。この点が放物面の焦点である。

問3 問2で求めた焦点 F は、光は位相が等しいときに強め合うという波動性を利用しても求められる。図2のように $z = \ell > 0$ で位相が揃っている平面波の入射を考える。

¹放物線をその軸を中心として回転させてできた曲面。

波面上の任意の点 $P = (x, \ell)$ を出て、放物面上の点 $A = (x, ax^2)$ で反射し、焦点 F に到達する光の光路長 (= 線分 PA と線分 AF の長さの和) を求めなさい。また焦点で光の位相が揃うことを示しなさい。

問4 凸レンズの焦点の外側にある物体の実像がレンズの反対側にできるのも、像と実像の間の光路長が光の経路によらなくなるためである。この原理を使って、屈折率が $n(> 1)$ の材料で作られた半径が R の凸レンズの形状を求めよう。この問題では表面が

$$z = \pm z_s(r) \quad (r < R)$$

となるようにレンズを置く。ただし $R = r$ での厚みは0とする。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ はレンズの光軸からの距離、 $z_s(r)$ はレンズの厚みの半分を表す。

図3を参考にして、 z 軸上の二つの点 $(z, x) = (2f, 0)$ と $(z, x) = (-2f, 0)$ を結ぶ光線の光路長を、光線が $z = 0$ の面を通過する位置 x の関数として求めなさい。また凸レンズでは光路長が x によらないことを利用し、その表面 $z = z_s(x)$ は2次曲線の一部となることを示しなさい。

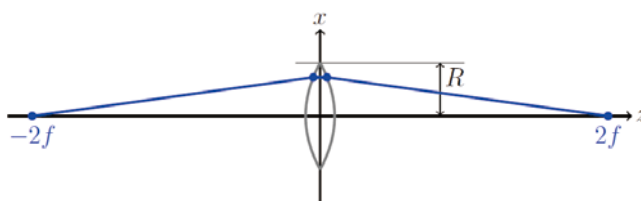


図3

(次ページに続く)

問5 図4のように、平面 $z=0$ を境として、屈折率が $z<0$ では1、 $z>0$ では $n(>1)$ である場合を考える。このとき $y=0$ の平面内で $z>0$ の点Pから $z<0$ の点Qへ光が到達する時間 t が最小となる経路を求めたい。そのような経路は座標が $(z,x)=(0,m)$ である点Mを通る折線に限られる。点Pの座標を $(z,x)=(z',0)$ 、点Qの座標は $(z,x)=(z'',q)$ として、 m, n, q, z', z'' が満たす関係式を求めなさい。この問いは問6の準備なので、 m を他の変数の関数にまとめる必要はない。これ以降、光の到達時間を計算する際には、屈折率1での光速度を v_{ph} と表しなさい。

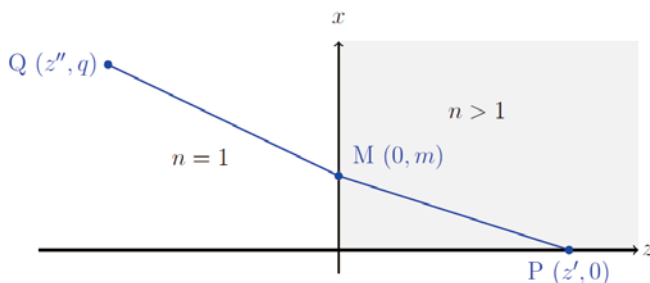


図4

問6 問5で求めた折線は屈折の法則に従うことを示しなさい。

問5, 6で確かめたように光は到達する時間が極小あるいは極大となる経路を通る。証明していないが、到達時間が極小あるいは極大となる経路は屈折の法則を満たす。このことを使って、レンズとして球体を使用した場合の像を考えよう。

問7 図5に示すように点光源を屈折率が n で半径が a の球体を通して見た場合を考える。球体の中心を原点とする座標を考え、点 $P(x,y,z)=(0,0,D)$ に置かれた点光源を点 $Q(x,y,z)=(0,0,-D)$ から観測する。球体の表面の点 $A=[(a \sin \theta, 0, a \cos \theta)]$ 、点 $B=[(a \sin \theta, 0, -a \cos \theta)]$ を考え、光が線分PA, AB, BQを通る場合の時間 t_{PABQ} を求めなさい。簡単のため、線分PAは球体の外側だけにある場合だけを考える。この条件を満たすのは $|\theta| \leq \theta_{\max}$ である。 $\cos \theta_{\max}$ の値を D, a を用いて表しなさい。

問8 球体の半径 a に対して距離 D が十分に遠い場合($D \gg a$)について、問7で求めた光の到達時間 t_{PABQ} が極大や極小をもつ条件を求めなさい。次に t_{PABQ} を θ の関数としてその概形を表しなさい。ただし θ の範囲は $-\theta_{\max} \leq \theta \leq \theta_{\max}$ としなさい。また縦軸は $t_{PABQ}(\theta) - t_{PABQ}(\theta=0)$ として変化の様子が分かるようにすること。この関数の極大や極小の数は屈折率 $n > 1$ の値により異なるので、場合分けすること。必要に応じて、 $|\alpha| \ll 1$ のとき $(1+\alpha)^\beta \doteq 1 + \alpha\beta$ などの近似式を用いて良い。

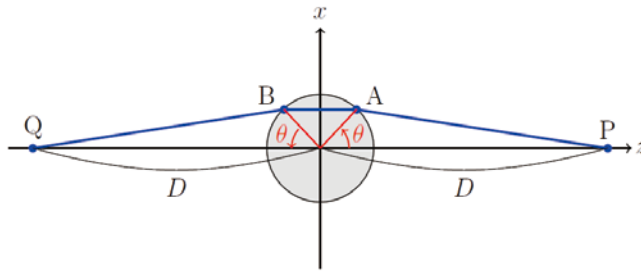


図 5

問 9 時刻 t_{PABQ} が θ の値により複数の極大や極小を持つ場合について、点 P にある光源が点 Q にいる観測者からどのように見えるか論じなさい。

問 10 図 6 に示すように、光源が点 $P(x, y, z) = (b, 0, D)$ にあり、これを点 $Q(x, y, z) = (b, 0, -D)$ から観測すると光源がどのように見えるか論じなさい。屈折率 n は問 9 で考えた条件を満たしており、球体の中心と PQ を結ぶ直線の距離 b はごくわずかに $(0 < b \ll a)$ であるとして良い。論理は数学的に厳密でなくても良い。

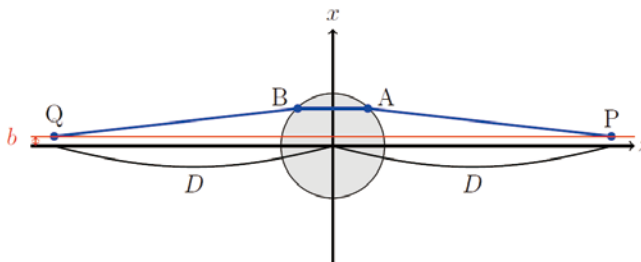


図 6

(次ページへ続く)

凸レンズや球体では、光が入射した際にその中心に向かう力が働いているように見える。一般相対論によれば、重力により真空の屈折率が変わる。質量 M の星から r だけ離れたところでの屈折率は $n = \left(1 - \frac{2GM}{rv_{\text{ph}}^2}\right)^{-1}$ と考えると、一般相対論の予言する光の屈折が得られる。ここで G は万有引力定数を表す。このことを利用して次の問題に取り組みなさい。

問 11 図 7 はハッブル宇宙望遠鏡で撮影した遠方の銀河団である。画面中央の明るく光った天体 (楕円銀河) の周囲に見える青い円弧状の天体は複数の銀河である。銀河が円弧状に見える理由と、この銀河が実際はどこに存在するかを論じなさい。



図 7 ハッブル宇宙望遠鏡により撮像された遠くの銀河。広がった赤い天体や青い天体は全て銀河である。(写真 NASA)

令和4年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理 課題I, II

解答例

R4
解答例

解答例：課題I

問 力のつり合いを考えると、 $0 = -kz_0 - mg$ であるから、

$$z_0 = -\frac{mg}{k}$$

である。

A-問1 運動方程式は、

$$ma = -kz - mg$$

である。

A-問2 前問より、 $ma = m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz - mg$ であるから、 $\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(z + \frac{mg}{k}\right)$ より、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。また、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

である。

A-問3 前問より、 $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2(z - z_0)$ であるから、 $z(t) = z_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t$ と書け

る。初期条件より、 $A = z_1 - z_0$ である。速度は、 $\frac{dz}{dt} = -(z_1 - z_0)\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ となる。再び初期条件を考えると、 $B = 0$ である。したがって、

$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)\cos\omega t$$

である。

B-問1 慣性系として、エレベータの外で静止している観測者から見た小球の鉛直上向きの座標系を考える。慣性系での小球の座標を Z とする。題意の小球の座標 z は、エレベータ内での座標系であり、エレベータが移動してゐないに関わらず、バネの自然長を座標原点 O としている。また、エレベータ内での座標系は慣性系とは平行に移動するので、ある時刻 t にエレベータ内の座標系の原点 O が慣性系では s であるとする、

$$Z = z + s \tag{1}$$

である。慣性系で小球に作用する力を f (本問では重力とバネによる復元力) とすると、その運動方程式は、

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} = f \tag{2}$$

であるが、ここに式 (1) を代入して整理すると、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = f - m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{3}$$

となる。すなわち、エレベータ内での座標系では、小球に慣性力 $-m\frac{d^2s}{dt^2}$ が加わる。

上記の考察の式 (3) に $s = \frac{\alpha_0 t^2}{2}$ を代入すると、 $f = -kz - mg$ であるから、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz - mg - m\alpha_0$$
 となつて、慣性力 $-m\alpha_0$ が加わる。

B-問 2 $z_2 = -\frac{m(g + \alpha_0)}{k}$ とする。前問より、 $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k \left(z + \frac{m(g + \alpha_0)}{k} \right) = -k(z - z_2)$ となるので、つり合いの位置が z_2 で角振動数が ω の単振動を行なう。初期条件を考えると、振幅は $z_0 - z_2$ である。 $t = 0$ での f は 0 であるが、慣性力が存在するため、小球は運動を始める。具体的な表式は、 $z(t) = z_2 + (z_0 - z_2) \cos \omega t$ である。

B-問 3 エレベータには重力に抗する力 $(+Mg)$ と加速度 α_0 でエレベータを鉛直上方に移動させる力 $(+M\alpha_0)$ 、バネの復元力に抗する力 $(-kz)$ の合力を加える必要があるので、

$$F = M(g + \alpha_0) - kz = (M + m)(g + \alpha_0) - m\alpha_0 \cos \omega t$$

である。

B-問 4 時刻 $t = \frac{3T}{4}$ 以降の運動方程式は、 $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z - z_0)$ に戻る。そこで、時刻 $t = \frac{3T}{4}$ でのエレベータ内での小球の位置と速度を求めると、B-問 2 の結果より

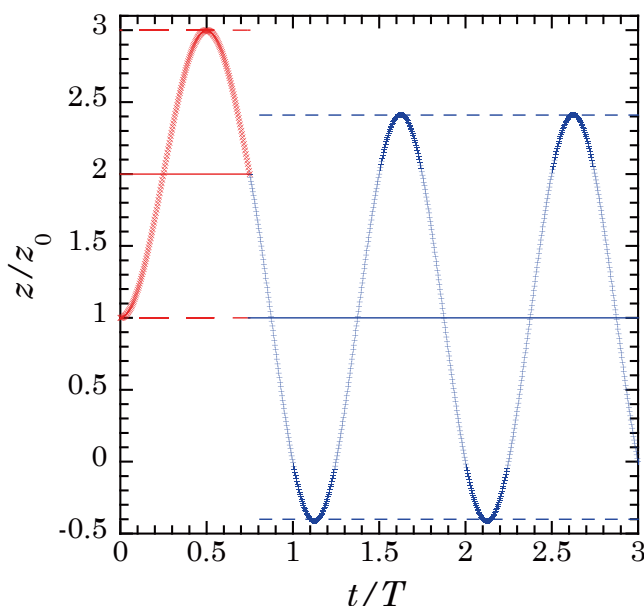
$$z\left(\frac{3T}{4}\right) = z_2, \quad \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=\frac{3T}{4}} = (z_0 - z_2)\omega$$

である。この条件の下で $z(t) = z_0 + A \cos \omega t + B \sin \omega t$ の定数 A, B を決めると、 $A = B = z_0 - z_2$ となるので、時刻 $t = \frac{3T}{4}$ 以降は、

$$z(t) = z_0 + (z_0 - z_2) \cos \omega t + (z_0 - z_2) \sin \omega t = z_0 + \sqrt{2}(z_0 - z_2) \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

なる単振動に移行する。

B-問 5 $z_2 = 2z_0$ であるので、時刻 $t = 0$ から $\frac{3T}{4}$ までの間では、 $z(t) = 2z_0 - z_0 \cos \omega t$ である。時刻 $t = \frac{3T}{4}$ から $3T$ までの間では、 $z(t) = z_0 - \sqrt{2}z_0 \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$ である。これをグラフとして表すと、次のようになる。



B-問5 解答例

R4

解答例

B-問6 小球に慣性力が加わらない状況で小球が静止し続けるには、慣性力が0になった瞬間に小球が z_0 の位置にあり、速度が0の必要がある。前問の時刻 $t = \frac{3T}{4}$ までのグラフをそのまま $t = \frac{3T}{4}$ 以降も延長すると、エレベータが等加速度運動中に小球の位置が z_0 になるのは、 n を自然数として、 $t = nT$ のときである。一般の α_0 の場合でも、振幅 $|z_0 - z_2|$ が変わるだけなので上記の考察結果は変わらない。このとき、小球の速度は $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=nT} = (z_2 - z_1) \sin(n\omega T) = 0$ である。すなわち、題意を満たす t_0 は存在して、 $t_0 = nT$ である。

C-問1 $Z_E = L - z_0$ である。

C-問2 エレベータの運動方程式は、 $M \frac{d^2 Z_E}{dt^2} = F_0 - Mg - k(Z_E - Z_P - L)$ である。小球の運動方程式は、 $m \frac{d^2 Z_P}{dt^2} = -mg + k(Z_E - Z_P - L)$ である。

C-問3 前問の結果より、 $\frac{d^2 Z_G}{dt^2} = \frac{F_0}{M+m} - g$ である。したがって、右辺が正であることが求める条件であるので、 $F_0 > (M+m)g$ である。

C-問4 前問より、 $Z_G = \frac{1}{2} \left(\frac{F_0}{M+m} - g \right) t^2 + \frac{M(L - z_0)}{M+m}$ となる。また、 Z_R は、C-問2の結果より、

$$\begin{aligned}
Mm \frac{d^2 Z_R}{dt^2} &= mF_0 - k(M+m)(Z_E - Z_P - L) \text{ である。右辺を変形して,} \\
Mm \frac{d^2 Z_R}{dt^2} &= -k(M+m) \left(Z_R - \frac{mF_0}{k(M+m)} \right) \text{ となるから, これを初期条件の下で} \\
\text{解けば, } \Omega &= \sqrt{\frac{k(M+m)}{Mm}} \text{ において,} \\
Z_R &= -z_0 + \left(z_0 + \frac{mF_0}{k(M+m)} \right) (1 - \cos \Omega t) \text{ となる。} Z_G \text{ と } Z_R \text{ が求まったので, こ} \\
\text{れらの式から } Z_E &\text{ を求めると,} \\
Z_E &= \frac{1}{2} \left(\frac{F_0}{M+m} - g \right) t^2 + L - z_0 + \frac{m}{M+m} \left(z_0 + \frac{mF_0}{k(M+m)} \right) (1 - \cos \Omega t) \text{ となる。}
\end{aligned}$$

D-問 1 運動方程式は, $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z - z_0) - m\alpha_1 \sin \omega_0 t$ である。まず, $A = B = 0$ として, 特解を求める。 $z(t) = z_0 + C \sin \omega_0 t$ を運動方程式に代入すると,

$$-C\omega_0^2 \sin \omega_0 t = -C\omega^2 \sin \omega_0 t - \alpha_1 \sin \omega_0 t \text{ であるから, } C = \frac{\alpha_1}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ となる。}$$

初期条件 $z(0) = z_0$, $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0$ を考えると, $A = 0$, $B\omega + C\omega_0 = 0$ より $B = -\frac{\omega_0 C}{\omega}$ であるから, $z(t) = z_0 + \frac{\alpha_1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(-\frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t + \sin \omega_0 t \right)$ となる。

D-問 2 $\omega_0 \ll \omega$ のときは, () 内の第一項が追加項 (補正項) になる。すなわち, 角振動数 ω_0 の単振動が主であり、そこに角振動数 ω の微小単振動が加わる。

$\omega_0 \gg \omega$ のときは, () 内の第二項が追加項 (補正項) になる。すなわち, 角振動数 ω の単振動が主であり、そこに角振動数 ω_0 の微小単振動が加わる。

$\omega_0 \doteq \omega$ のときを考える。 $\omega_0 = \omega + \Delta$, $|\Delta| \ll \omega$ とする。さらに, $|\Delta t| \ll 1$ の時間スケールで, $\sin \omega_0 t$ に $\omega_0 = \omega + \Delta$ を代入すると,

$$\sin \omega_0 t = \sin(\omega t + \Delta t) = \sin \omega t \cos \Delta t + \cos \omega t \sin \Delta t \doteq \left(1 - \frac{\Delta^2 t^2}{2} \right) \sin \omega t + \Delta t \cos \omega t.$$

$$\begin{aligned}
\therefore -\frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t + \sin \omega_0 t &\doteq -\left(1 + \frac{\Delta}{\omega} \right) \sin \omega t + \left(1 - \frac{\Delta^2 t^2}{2} \right) \sin \omega t + \Delta t \cos \omega t \\
&= -\left(\frac{\Delta}{\omega} + \frac{\Delta^2 t^2}{2} \right) \sin \omega t + \Delta t \cos \omega t \\
&\doteq -\frac{\Delta}{\omega} \sin \omega t + \Delta t \cos \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore z(t) &\doteq z_0 + \frac{\alpha_1}{2\Delta\omega} \left(-\frac{\Delta}{\omega} \sin \omega t + \Delta t \cos \omega t \right) \\
&= z_0 + \frac{\alpha_1}{2\omega} \left(-\frac{1}{\omega} \sin \omega t + t \cos \omega t \right)
\end{aligned}$$

となる。ここで, 仮に $\omega = 1$, $\Delta = 10^{-5}$ とすると, $t < 2\pi \times 10^2$ 程度までなら, $|\Delta t| \ll 1$ と見なすことができるので, これらを代入すると,

$$z(t) = z_0 + \frac{\alpha_1}{2} (-\sin t + t \cos t)$$

となる。すなわち, この例では, 10^2 周期まで時間 t に比例して振動の振幅が増大し続けることを示している。 Δ をより小さくすれば, t を大きくすることができるので, $\omega_0 \rightarrow \omega$ の極限では, 振幅は発散する。この現象は, 共振 (共鳴) と呼ばれる。

「補足」 $\omega_0 = \omega$ の場合の解を求めることを考えてみる。

この場合、 $z(t) = z_0 + A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t$ としたうえで、解を求めるが、これでは $A(t)$ 、 $B(t)$ を決定できないので、 $\frac{dA(t)}{dt} \cos \omega t + \frac{dB(t)}{dt} \sin \omega t = 0$ という条件を課すことにする。初期条件は引き続き、 $z(0) = z_0$ 、 $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0$ である。

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\omega A(t) \sin \omega t + \omega B(t) \cos \omega t$$

初期条件から、 $A(0) = B(0) = 0$ である。さらに、

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\omega^2(z(t) - z_0) - \omega \frac{dA(t)}{dt} \sin \omega t + \omega \frac{dB(t)}{dt} \cos \omega t$$

$$\text{すなわち、} -\omega \frac{dA(t)}{dt} \sin \omega t + \omega \frac{dB(t)}{dt} \cos \omega t = -\alpha_1 \sin \omega t$$

である。これらの式と初期条件から $A(t)$ 、 $B(t)$ の連立微分方程式を解けば、

$$A(t) = \frac{\alpha_1}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right), \quad B(t) = \frac{\alpha_1}{4\omega^2} \cos 2\omega t$$

である。これを、 $z(t) = z_0 + A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t$ に代入して整理すると、

$$z(t) = z_0 + \frac{\alpha_1}{2\omega} \left(t \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$$

となって近似で求めた式と一致する。この式は厳密な式なので、 t の範囲に上限はなく、振動の振幅が発散することが近似なしで示されたことになる。

D-問3 運動方程式は、 $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z - z_0) - 2m\gamma \frac{dz(t)}{dt}$ である。

また、初期条件は $z(0) = z_1$ 、 $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0$ である。

$$\gamma < \omega \text{ のとき、} A = z_1 - z_0, \text{ また、} B = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} A = \frac{\gamma(z_1 - z_0)}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

$$\therefore z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)e^{-\gamma t} \left(\cos \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right)$$

となり、減衰振動する。

$$\gamma = \omega \text{ のとき、} B = z_1 - z_0, \text{ また、} A = \gamma B = \gamma(z_1 - z_0)$$

$$\therefore z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)e^{-\gamma t}(\gamma t + 1)$$

となり、振動はしないものの減衰する（臨界減衰と呼ばれる）。

$$\gamma > \omega \text{ のとき、} A = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}(z_1 - z_0), \text{ また、} B = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} - \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}(z_1 - z_0)$$

$$\therefore z(t) = z_0 + \frac{z_1 - z_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} e^{-\gamma t} \{ (\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} + \gamma) e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + (\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} - \gamma) e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \}$$

となり、これも振動はせず、また $\{$ 内に指数的に発散する項が存在するものの、 $e^{-\gamma t}$ の減衰のほうが強いので、減衰する（過減衰と呼ばれる）。

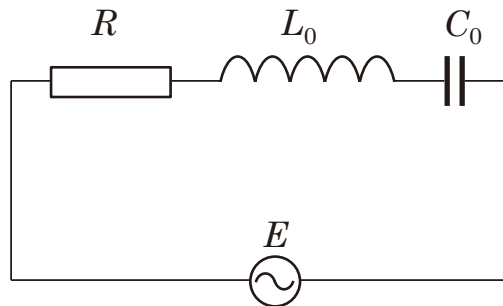
D-問4 小球の運動方程式は、 $\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2(z - z_0) - 2\gamma \frac{dz}{dt} - \alpha_1 \sin \omega_0 t$ である。

図 (D-問3) のような、抵抗値 R の抵抗、インダクタンス L_0 のコイル、容量 C_0 のコンデンサ、交流電源 $E = E_0 \cos \omega_0 t$ からなる RLC 直接回路を考える。この回路を流

れる電流 $I(t)$ を考える。コンデンサに蓄えられる電荷を $Q(t)$ とすると、 $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ である。回路に対してキルヒホッフの法則を考えると、

$$RI + L_0 \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C_0} = E_0 \cos \omega_0 t$$
 である。両辺を時間微分して整理すると、

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{I}{L_0 C_0} - \frac{R}{L_0} \frac{dI}{dt} - \frac{\omega_0 E_0}{L_0} \sin \omega_0 t$$
 であり、RLC 直列回路での電流の時間変化は、本問のエレベータ内での小球の運動と対応することがわかる。



D-問3 解答例 (RLC 直列回路)

R4
解答例

解答例：課題II

出題の意図

波動性から光の反射や屈折を理解できるかどうか問う問題である。この問題では波動性の理解とともに、接線に垂直、角度の2等分といった幾何学を、代数的に扱う数学力も試している。また正解を求めるには関数の極大極小を求める数学力や、想像力も必須である。やや面倒な計算であるが、遠くの銀河が円弧状に見える理由を理解できれば、計算の苦労も報われるだろう。

問1 $\frac{dz}{dx} = 2ax$ より、接線はベクトル $(1, 2ab)$ と向きが同じである。これに対して問題文で与えられた法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (c, 1) \quad (1)$$

となる。法線ベクトルと接線ベクトルは垂直であるという条件より、

$$c + 2ab = 0 \longrightarrow c = -2ab \quad (2)$$

が得られる。入射光と法線のなす角度は、反射光と法線のなす角度が等しいことを考えると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(c')^2 + 1}} \begin{pmatrix} c' \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

この方程式を解くと

$$c' = \frac{4ab}{4a^2b^2 - 1} \quad (4)$$

がえられる。

問2 反射光が z 軸と交わるのは媒介変数表示

$$t = -\frac{b}{c'} = -\frac{4a^2b^2 - 1}{4a} = -ab^2 + \frac{1}{4a} \quad (5)$$

なので、反射光は $(x, z) = \left(0, \frac{1}{4a} \right)$ を通る。この座標は b の値によらない。この放物面の焦点距離は $\frac{1}{4a}$ である。

問3 焦点の座標が $(x, z) = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ と表されることを使うと線分 AF の長さは

$$\overline{AF} = \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 + \frac{1}{4a} \quad (6)$$

ここで $\overline{PA} = \ell - ax^2$ を代入すると,

$$\overline{PA} + \overline{AF} = \ell + \frac{1}{4a} \quad (7)$$

が得られる。光路長は b によらないので、焦点で光の位相は揃うことが示せた。

問4 レンズは $z = 0$ の面と z 軸について対称なので、 xz 面を通り $z = 0$ について対称な光線だけを考える。レンズ内では光軸から r だけ離れた点を通る光線の光路長は

$$\ell = 2 \left[nz_s + \sqrt{(z_s - 2f)^2 + x^2} \right] \quad (8)$$

とあらわされる。これがレンズの端 $r = R$ を通る光線の光路長 $(= 2\sqrt{R^2 + r^2})$ と等しくなるには

$$nz_s + \sqrt{(z_s - 2f)^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + 4f^2} \quad (9)$$

が満たされるときである。これを変形すると

$$(z_s - 2f)^2 + x^2 = n^2(z_s)^2 - 2n\sqrt{R^2 + 4f^2}z_s + R^2 + 4f^2 \quad (10)$$

$$(1 - n^2)(z_s)^2 + 2(n\sqrt{R^2 + 4f^2} - 2f)z_s + x^2 = R^2 \quad (11)$$

が得られる。式 (11) の左辺 $(z_s)^2$ の前の係数は $(1 - n^2) < 0$ であり、その標準形は

$$(1 - n^2) \left[z_s - \frac{(n\sqrt{R^2 + 4f^2} - 2f)}{n^2 - 1} \right]^2 + x^2 = R^2 + \frac{(n\sqrt{R^2 + 4f^2} - 2f)^2}{(1 - n^2)} \quad (12)$$

なので、これは双曲線を表す。ここまで光線は $y = 0$ を通ると仮定したが、レンズの軸に対称でなのでレンズの表面は式 (11) や (12) の x^2 を $x^2 + y^2$ に置き換えた双曲面であることが分かる。2次曲線であることは式 (11) で明らかなので、式 (12) まで導く必要はないが、このように変形すると双曲線の中心が $z > 0$ にあることが分かる。

問5 真空中の光速度を v_{ph} とすると屈折率 n での速度は v_{ph}/n なので

$$t = v_{\text{ph}}^{-1} \left[n\sqrt{m^2 + (z')^2} + \sqrt{(q-m)^2 + (z'')^2} \right] \quad (13)$$

極小となるのは $\frac{dt}{dm} = 0$ なので、条件

$$\frac{nm}{\sqrt{m^2 + (z')^2}} = \frac{q-m}{\sqrt{(q-m)^2 + (z'')^2}} \quad (14)$$

が得られる。

問6 ここで

$$\sin i = \frac{m}{\sqrt{m^2 + (z')^2}} \quad (15)$$

$$\sin r = \frac{q-m}{\sqrt{(q-m)^2 + (z'')^2}} \quad (16)$$

なので、問5で求めた条件式はスネルの法則に他ならない。

問7 線分 PA = $\sqrt{(D - a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{D^2 - 2aD \cos \theta + a^2}$ なので

$$t_{\text{PABQ}} = \frac{2}{v_{\text{ph}}} \left[\sqrt{D^2 - 2aD \cos \theta + a^2} + na \cos \theta \right] \quad (17)$$

線分 PA や BQ が球に接するのは $D \cos \theta = a$ の時なので

$$\cos \theta \geq \frac{a}{D} \quad (18)$$

が条件である。したがって $\cos \theta_{\text{max}} = a/D$ が求まる。

問8 t_{PABQ} が極値をとるのは

$$\sin \theta \left(-\frac{D}{\sqrt{D^2 - 2aD \cos \theta + a^2}} + n \right) = 0 \quad (19)$$

である。この条件を満たすのは $\theta = 0$ の場合と

$$\cos \theta = \frac{(n^2 - 1)D^2 + n^2 a^2}{2n^2 a D} \quad (20)$$

問7で求めた関係式より $\frac{a}{D} \leq \cos \theta < 1$ である。この条件が満たされるのは

$$\frac{D^2}{D^2 - a^2} \leq n^2 < \left(\frac{D}{D - a} \right)^2. \quad (21)$$

とまとめられる。レンズの大きさに比べて距離が十分に遠い ($D \gg a$) 場合, 式 (21) を

$$\left[1 - \left(\frac{a}{D}\right)^2\right]^{-1/2} \leq n < \left(1 - \frac{a}{D}\right)^{-1} \quad (22)$$

と変形したのち, $a/D \ll 1$ と近似の公式を用れば

$$1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{D}\right)^2 \leq n < 1 + \frac{a}{D} \quad (23)$$

が得られる。

t_{PABQ} のグラフを書く際には $\theta = 0$ のときに極小か極大か見極めるために 2 階微分を求めると良い。

$$\left. \frac{d^2 t_{\text{PABQ}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = 2a \left(\frac{D}{D-a} - n \right) \doteq 2a \left(1 + \frac{a}{D} - n \right) \quad (24)$$

なので, $n < 1 + \frac{a}{D}$ であれば極小である。この事柄を考慮すると, 図 A1 に示したように t_{PABQ} の概形は屈折率の大きさに応じて 3 つの場合に分けられる。屈折率が 1 に極めて近い場合には青線のように $\theta = 0$ で t_{PABQ} は最小となる。逆に屈折率が大きい ($n > 1 + \frac{a}{D}$) 場合, $\theta = 0$ で t_{PABQ} は極大となり, 黒線で示したように球体を通過する距離が短いほど t_{PABQ} は短くなる。この中間の屈折率の場合, 方程式 (19) が $\theta = 0$ のほかに θ が正負の 2 根をもつ。したがって, t_{PABQ} が $\theta = 0$ で極小で途中で極大となる赤線のような曲線となる。

R4
解答例

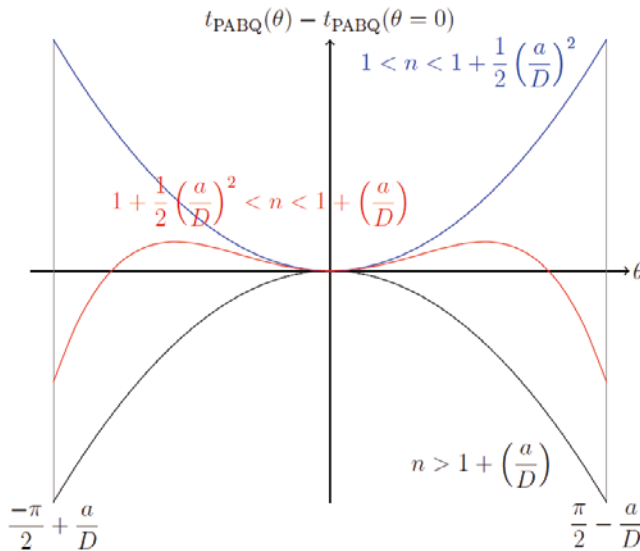


図 A1 t_{PABQ} の概形。

t_{PABQ} が極大極小となる角度 θ はスネルの法則から求めることもできる。線分 PA と z 軸のなす角度は $\Delta\theta = \frac{a \sin \theta}{D}$ である。A 点での屈折角は $r = \theta$ で入射角は $i = \theta + \Delta\theta$ である。スネルの法則を適用すると

$$n \sin \theta = \sin(\theta + \Delta\theta) = \sin \theta \cos \Delta\theta + \cos \theta \sin \Delta\theta \quad (25)$$

が得られる。角度 $\Delta\theta$ は小さいので

$$\sin \Delta\theta \doteq \Delta\theta \doteq \frac{a \sin \theta}{D} \quad (26)$$

$$\cos \Delta\theta \doteq 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2} \doteq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a \sin \theta}{D} \right)^2 \quad (27)$$

と近似できる。これらを代入すると

$$\frac{a}{D} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{a \sin \theta}{D} \right)^2 = n - 1 \quad (28)$$

が得られる。 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ と表せることに注意すると、

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{a \cos \theta}{D} \right)^2 + \left(\frac{a \cos \theta}{D} \right) = n - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{D} \right)^2 \quad (29)$$

のようにまとめられる。この方程式は $a \cos \theta / D$ についての方程式なので $\cos \theta$ を求めることができる。大学で習う逆三角関数を使えば θ も求めることができる。

問 9 問 7 で t_{PABQ} が極小となる角度 θ を通る光線が実現するので、輪と中心の点が見える。

問 10 光線が $y \neq 0$ を通る場合、これを xz 平面に射影したもののほうが必ず短い。また y の値を 2 倍にしたもののほうが必ず長い。したがって光線が $y \neq 0$ では極値を取らないので、 xz 平面を通る光路だけを考える。このとき時間は

$$t = \frac{2}{v_{\text{ph}}} \left[\sqrt{(a \sin \theta - b)^2 + (D - a \cos \theta)^2} + na \cos \theta \right] \quad (30)$$

これが極値となる条件は

$$\frac{a \cos \theta (a \sin \theta - b) + a \sin \theta (D - a \cos \theta)}{\sqrt{(a \sin \theta - b)^2 + (D - a \cos \theta)^2}} - na \sin \theta = 0 \quad (31)$$

少し整理すると

$$\frac{-b \cos \theta + D \sin \theta}{\sqrt{D^2 - 2a(D \cos \theta + b \sin \theta) + a^2 + b^2}} - n \sin \theta = 0 \quad (32)$$

という $b = 0$ の場合と似た形にまとめることができる。問 7 の場合 t_{PABQ} は θ の偶

関数であるので、極大や極小は θ の正負に対称に現れる。しかし $b \neq 0$ の場合、対称性が失われるので、 t_{PABQ} は $\theta = 0$ で極値とはならない。しかし b がごく小さい場合、やはり $\theta = 0$ の付近で t_{PABQ} は極小となっているはずである。 t_{PABQ} が極大となる角度 θ も θ が正負の領域に1つずつ存在するはずである。問8の場合は円環と中心の点が見えたが、円環が切れて2つの点となり、中心の点と合わせて3点が直線状に並んで見える。3点の間隔は等しくない。

前段までの分析ができれば大学生として物理学を学ぶのに十分すぎるくらいの実力であるが、さらに次のような計算を実行できる受験生がいたら素晴らしい。

t_{PABQ} が極小となる角度は $\sin \theta \doteq \theta$, $\cos \theta \doteq 1$, $a, b \ll D$ と近似すると、

$$-\frac{b}{D} + \left(1 + \frac{a}{D}\right)\theta - n\theta \doteq 0 \quad (33)$$

より、

$$\theta = \frac{b}{D} \left(1 + \frac{a}{D} - n\right)^{-1} \quad (34)$$

が得られる。

t_{PABQ} が極大となる角度 θ も工夫すれば求めることができる。線分 PA と z 軸のなす角度は

$$\Delta\theta' = \frac{a \sin \theta - b}{D} \quad (35)$$

と求められる。極小となる角度は $b = 0$ のときの値 θ_0 からわずかに異なる $\theta = \theta_0 + \beta$ となるはずである。したがってスネルの法則は

$$n \sin \theta_0 + \beta = \sin \left(\theta_0 + \beta + \frac{a \sin \theta - b}{D} \right) \quad (36)$$

と書き表すことができる。ここで β と b が十分に小さいことを利用すると

$$(n \cos \theta_0) \beta = \cos \left(\theta_0 + \frac{a \cos \theta}{D} \right) \times \left(\beta - \frac{b}{D} \right) \quad (37)$$

と表せる。ここで $a \cos \theta_0 / D$ がとても小さいので、

$$\cos \theta_0 \doteq \cos \left(\theta_0 + \frac{a \cos \theta}{D} \right) \quad (38)$$

と近似して差し支えない。したがって

$$\beta = -\frac{b}{(n-1)D} \quad (39)$$

が得られる。

大学で習う数学，マクローリン展開（またはテーラー展開）を使うと，図7に示したようなグラフの概形についても推測することができる。式(32)を b で微分すると

$$v_{\text{ph}} \frac{dt}{db} = \frac{2(a \sin \theta - b)}{\sqrt{(a \sin \theta - b)^2 + (D - a \cos \theta)^2}} \quad (40)$$

が得られるので， $b=0$ での微係数は

$$v_{\text{ph}} \left. \frac{dt}{db} \right|_{b=0} = \frac{2a \sin \theta}{\sqrt{D^2 - 2aD \cos \theta + a^2}} \quad (41)$$

であることが分かる。この結果を用いると， b が十分に小さい場合

$$v_{\text{ph}} t \approx 2 \left[\sqrt{D^2 - 2aD \cos \theta + a^2} + na \cos \theta \right] + \frac{2a \sin \theta}{\sqrt{D^2 - 2aD \cos \theta + a^2}} b \quad (42)$$

とマクローリン展開により近似式がえられる。式(42)の右辺の b に比例する項は θ について反対称である。全体として関数は非対称になることが確認できた。

問11 銀河はこの写真の中央部の明るく見える手前の銀河の裏側に存在する。画面中央にある銀河の重力によりレンズ効果が生じ，光が曲がって届く。問7, 8, 9で考えたように中央の銀河の真裏に青い銀河があれば，銀河は青い環となって見えるはずである。円弧となっているのは少しずれているためと考えられる。

レンズと重力レンズの類似点については ヘクト 著 尾崎・浅倉 訳 光学I－基礎と幾何光学－(丸善, 2002年)などを参照されたい。重力レンズ効果については p. 350 から解説が提示されている。

令和3年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理

課題I, II

(9:00-15:00)

注意事項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は，手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り，カバンにしまってください。
6. その他，監督者の指示に従って下さい。

[I]

質量 m 、半径 a の同じ材質・形状の円板 A, B を用意する。これらの円板を一様に粗な水平面を滑らせ、目標とする位置に止めるカーリングのようなゲームを考えよう。円板と水平面との間の動摩擦係数を μ' 、円板同士の間の反発係数を e 、重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えなさい。

まず2つの円板の中心が水平面上の x 軸に沿って運動する場合を考えよう。

問1 円板 A を初速度 u で滑らせたところ、図1のように円板の半径と同じ距離 a だけ進んで止まった。静止するまでに要した時間 τ と、動摩擦係数 μ' を a, g, u を用いて表しなさい。

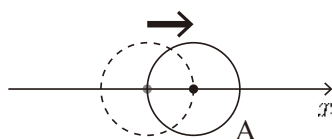


図1

以下の問いでは問1で得られた関係式を使い、最終的な答えは μ' を使わずに表しなさい。

問2 円板 A を ℓ だけ進めて静止させるには、初速度を u の何倍にしたら良いか答えなさい。

問3 円板 A を静止している円板 B に衝突させたところ、図2のように円板 A は向きを変えずに運動し、円板 B は ℓ_B だけ進んで静止した。この衝突で円板 A が円板 B に与えた力積の大きさを a, ℓ_B, m, u を用いて表しなさい。

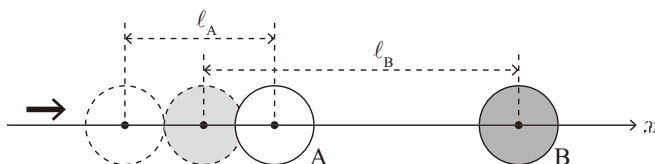


図2

問4 問3の設定で円板 A が衝突後に進んだ距離 ℓ_A を ℓ_B, e を用いて表しなさい。ただし衝突の間に円板にはたらく水平面からの摩擦力は無視する。

問5 中心が位置 $x = b$ (ただし $b > 2a$) で静止している円板 B に、位置 $x = 0$ を速度 v で通過した円板 A が衝突した。円板 A の中心を位置 $x = \ell$ (ただし $\ell > b - 2a$) に静止させるには、速度 v を u の何倍にしたら良いか答えなさい。またこのとき円板 B が静止する位置を求めなさい。

次に衝突するときの速度差が、2つの円板の中心を結ぶ直線に対して傾いている場合を考えよう。

問6 図3のように衝突する直前、円板 B の速度 $\vec{v}_B$ は円板 A の速度 $\vec{v}_A$ と大きさが等しく、向きが反対である場合 ($\vec{v}_B = -\vec{v}_A$) を考えよう。円板 A の速度 $\vec{v}_A$ は円板 A と B の中心を結ぶ直線に平行な成分 $\vec{v}_{\parallel}$ とそれに垂直な成分 $\vec{v}_{\perp}$ に分解できる ($\vec{v}_A = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$)。衝突の際、円板同士の間摩擦は無視できるとすると、垂直成分 $\vec{v}_{\perp}$ は変化しない。一方、平行成分 $\vec{v}_{\parallel}$ の変化は一直線上の衝突の場合と同様に反発係数 e で与えられる。このとき、衝突後の円板 A と B の速度 $\vec{v}'_A$ と $\vec{v}'_B$ を $\vec{v}_{\parallel}$ と $\vec{v}_{\perp}$ を用いて表しなさい。

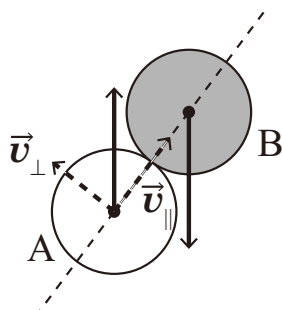


図3

問7 もし問6の衝突の際に円板同士の間摩擦がはたらくと、円板 A と B にどのような運動が加わるだろうか？またその運動の様子から、衝突の際の摩擦の大きさを調べる方法を簡潔に述べなさい。

問8 衝突の間に円板にはたらく水平面からの摩擦力は無視する。このとき衝突前の円板 B とともに動いている観測者から見ても同じ法則が成り立つ。このことを考慮して、静止している円板 B に円板 A が速度 $\vec{w}_A = \vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}$ で衝突するとき、衝突後の円板 A と B の速度 $\vec{w}'_A$ と $\vec{w}'_B$ を $\vec{w}_{\parallel}$ と $\vec{w}_{\perp}$ を用いて表しなさい。

ここまでの結果を使って、円板 A を静止している円板 B と衝突させ、円板 B を目標 G の位置に止めることを考えよう。図 4 のように円板 A と B の初期の中心位置をそれぞれ $(\ell, 0)$, $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 、目標 G の位置を原点 $(0, 0)$ とする。円板 A に初速度 (v_x, v_y) を与えたところ、図 5 のように円板 A と B は点 P で衝突した。ただし $0 < r < \ell - 2a$ である。問 9 から問 11 の設問では円板 B が衝突後に目標 G で静止したとして答えなさい。ただし円板同士の間の摩擦は無視する。

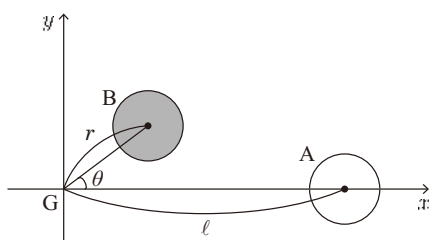


図 4

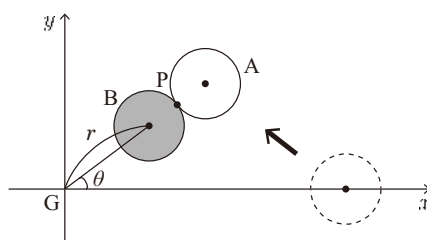


図 5

問 9 円板 B の衝突直後の速度のうちベクトル BP に平行な成分は u の何倍になるか求めなさい。向きは B から P に向かう方向を正とすること。

問 10 円板 B の衝突直後の速度を $\vec{v}_B = (v'_{Bx}, v'_{By})$ とする。この速度を a, r, u, θ を用いて表しなさい。

問 11 円板 B と衝突した時刻での円板 A の中心の座標 (x_A, y_A) を a, r, θ を用いて表しなさい。

問 12 円板 B を目標 G で静止させることができるのは、角度 θ がある範囲に限られる。この範囲を $a, \ell, r, \cos \theta$ を用いた不等式で表しなさい。

問 13 $\ell = 4a$ の場合について、目標 G に静止させることができる円板 B の初期位置を求め、その中心位置のとりうる範囲を図示しなさい。この設問の答えは専用の方眼紙を用い、図 4 のように平面図として記すこと。必要ならば電卓を用いて良い。

問 14 $\ell = 4a, r \cos \theta = \frac{2}{5}a, r \sin \theta = \frac{3}{10}a, e = \frac{3}{7}$ で、円板 B が目標 G で静止するときの円板 A の初速度ベクトルを求めなさい。

[II]

電場中に置かれた金属（導体）の表面に電荷が現れる現象を静電誘導という。ここでは、真空中に置かれた金属の表面に誘起される電荷分布について調べよう。

問1 微小な領域を考えると、なめらかな金属表面は平坦と考えてよい。図1のように、金属のすぐ外側および金属の内側に、表面に平行で同じ形の小さな面 S 、 S' を設ける。これらの面 S 、 S' と表面と直交する側面で囲まれた微小な領域を考えると、表面の電荷密度 σ （単位面積当たりの電気量）と表面上の電場 E （ただし金属表面外向きを正とする）には式(1)で表される関係があることを、電気力線の数を考えることで説明せよ。ここで「表面上の電場」とは、金属表面のすぐ外側における電場のことである。また、 k は真空におけるクーロンの法則の比例定数である。

$$E = 4\pi k \cdot \sigma \quad (1)$$

金属表面のすぐ外側では電場は表面に垂直なので、図2のように表面に垂直に r 軸を取ると、表面近くでは電位 V は座標 r の関数となり、表面上の電場 E は

$$E = -\frac{d}{dr}V(r_0) \quad (2)$$

のように $V(r)$ の微分の表面上での値 ($V(r)$ を微分してから、表面上の座標 $r = r_0$ を代入した値) で与えられることが知られている。以上の式(1)、(2)を用いると、表面近くの電位 $V(r)$ から表面の電荷密度 σ を求めることができる。

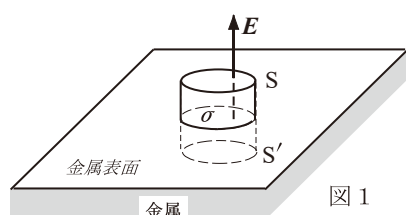


図1

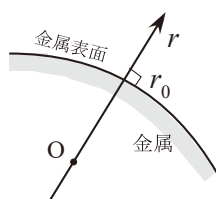


図2

この原理を用いて、まず、金属板の表面に誘起される電荷分布を調べよう。図3のように、 $x = 0$ の yz 平面を表面として、接地された十分厚い金属板を $x \leq 0$ の領域に置く。 x 軸上の点 $A(a, 0, 0)$ （ただし $a > 0$ ）に点電荷 q （ただし $q > 0$ ）を置いたとき、 xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ （ただし $x > 0$ ）での電位 $V(P)$ は、点電荷 q による電位と、金属板の表面に誘起された電荷による電位の和（重ね合わせ）で与えられる。W. トムソンは、後者の電位は x 軸上の点 $A'(a', 0, 0)$ （ただし $a' < 0$ ）に点電荷 q' を置いたものと同じになること

を見出した。このときの点電荷 q' を鏡像電荷という。すなわち、無限遠点 $x = +\infty$ を電位の基準にとると、点 P における電位は次式となる。

$$V(P) = k \frac{q}{PA} + k \frac{q'}{PA'} \quad (3)$$

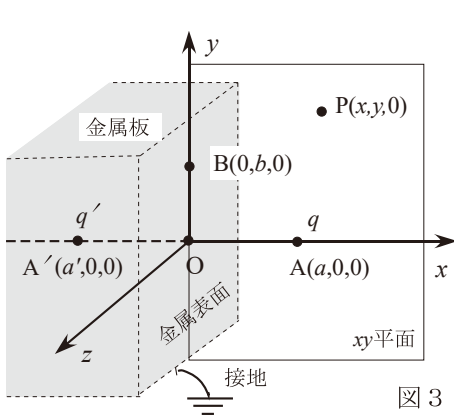


図 3

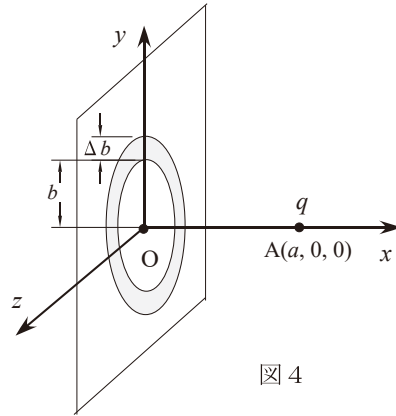


図 4

問 2 $V(P)$ を x, y を用いて表せ。次に、金属板は接地されているので、点 P が表面 ($x = 0$) のどの位置 (任意の y) でも $V = 0$ となることを用いて、 a', q' を求めよ。

問 3 x 軸が表面に垂直であることに注意し、金属板の表面の位置 $B(0, b, 0)$ に誘起される電荷密度 $\sigma(b)$ を求め、 b の関数としてグラフに描け。

問 4 金属板の表面に誘起された全電荷 Q' は、問 3 の $\sigma(b)$ を用いて求まる。誘起される電荷分布は x 軸周りに回転対称性 (x 軸周りに回転しても同じ電荷分布となっていること) を持つこと、図 4 のように yz 平面内の原点 O からの半径が b と $b + \Delta b$ の間にある細い円環の面積は $2\pi b \cdot \Delta b$ であることに注意すると、

$$Q' = \int_0^{+\infty} \sigma(b) \cdot 2\pi b \, db \quad (4)$$

である。 b に関する積分を実行して Q' を求めよ。

問 5 金属板の表面に誘起された電荷によって、点 A の電荷 q には x 軸の負の方向に力がはたらく。その力の大きさ F は、次式で与えられる。

$$F = \left| \int_0^{+\infty} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \cdot \left[k \frac{q \cdot \sigma(b) \cdot 2\pi b}{a^2 + b^2} \right] db \right| \quad (5)$$

被積分関数の意味を説明せよ。また、積分を実行して F を求めよ。次にこの結果から、電荷 q にはたらく力は、表面に誘起された電荷の代わりに、鏡像電荷 q' を考えたときの力と同じになっていることを示せ。

次に、原点 O を中心として置かれた、半径 R の金属球の表面に誘起される電荷分布を調べよう。ただし金属球は接地されているとする。 x 軸上の点 $A(a, 0, 0)$ (ただし $a > R$) に点電荷 q (ただし $q > 0$) を置いた。この場合も、誘起される電荷分布は x 軸周りに回転対称性を持つので、図 5 のような xy 平面内だけを考えることにする。

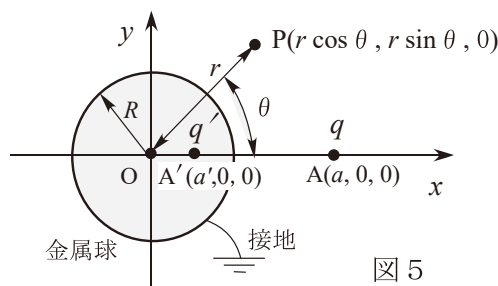


図 5

問 6 金属球外の点 P (その座標を $(x, y, 0) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ とする。 r は原点からの距離、 θ は OP と x 軸の間の角度である) における電位 $V(P)$ を考える。電位は、点電荷 q による電位と、表面に誘起された電荷による電位の和で与えられるが、この場合も、後者の電位は x 軸上の点 $A'(a', 0, 0)$ に鏡像電荷 q' を置いたものと同じになることが知られている。すなわち、無限遠点 $r = +\infty$ を電位の基準にとると、点 P における電位は、

$$V(P) = k \frac{q}{PA} + k \frac{q'}{PA'} \quad (6)$$

となる。金属球は接地されているので、点 P が表面 ($r = R$) のどの位置 (任意の θ) でも $V = 0$ となることを用いて、 a' 、 q' を求めよ。

問 7 θ を一定に保ったまま r を大きくする方向 (つまり r 軸) が球表面に垂直であることに注意して、問 3 と同様に、金属球の表面の位置 $B(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ を求めよ。次に、 $a = 2R$ および $a = 10R$ の場合の $\sigma(\theta)$ を、 θ の関数としてグラフに描け。

次に、点電荷を使って、金属球のない真空中に一樣な電場を作ることを考える。点 $A(a, 0, 0)$ に点電荷 q を、点 $C(-a, 0, 0)$ に点電荷 $-q$ を置いた。

問 8 原点 O にできる電場の強さを E_0 とするためには、 q をいくつにすればよいか。また、点 $P(r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ における電位は、点電荷 q 、および $-q$ による電位の和でつくられる。点 P の電位 $V_1(P)$ を、 E_0 を用いて (q を用いずに) 表せ。

問 9 E_0 を一定値に保ったまま $a \rightarrow +\infty$ (同時に $q \rightarrow +\infty$) とすると、原点付近には強さ E_0 のほぼ一樣な電場ができることになる。このとき $r \ll a$ なので、 $\frac{r}{a}$ の 2 次以上の項を無視し、 $V_1(P)$ を E_0 、 r 、 θ を用いて表せ。必要なら $|t| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1+t)^\alpha \approx 1 + \alpha t$ (ただし α は実数) を用いてよい。

最後に、 x 軸の負の方向を向いた強さ E_0 の一様な電場がある場合に、原点 O を中心として置かれた半径 R の接地された金属球の表面に誘起される電荷分布を、鏡像電荷の考え方、および問 9 の結果を応用して求めてみよう。

点 $A(a, 0, 0)$ に点電荷 q を、点 $C(-a, 0, 0)$ に点電荷 $-q$ を置いた（ただし $a > R$ ）。このとき、金属球外の点 $P(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ （ただし $r > R$ ）における電位は、点電荷 $q, -q$, およびそれぞれの鏡像電荷による電位の和でつくられる。

問 10 2つの鏡像電荷が金属球外の点 P につくる電位 $V_2(P)$ を求めよ。次に、 E_0 を一定値に保ったままで $a \rightarrow +\infty$ とすると、 $R, r \ll a$ なので $\frac{R^2}{ar}$ の 2 次以上の項を無視し、問 9 と同じ近似式を用いることで、 $V_2(P)$ を E_0, r, R, θ を用いて表せ。

問 11 問 10 の電位が $V_2 = \phi$ (一定値) となる等電位面の大まかな様子を、 xy 平面上で描け。 $\phi = 0$, および ϕ が正および負で、かつ値が異なる場合の違いが分かるように描くこと。次に、電気力線の様子を同じ図上に描け。電場の方向が分かるように、電気力線には矢印をつけること。

以上から、一様な電場 E_0 中にある金属球の外の点 P の電位は、問 9, 10 の結果を用いて $V(P) = V_1(P) + V_2(P)$ となる。

問 12 一様な電場 E_0 中にある金属球の表面の位置 $B(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$ に誘起される電荷密度 $\sigma(\theta)$ を $V(P)$ から求め、 θ の関数としてグラフに描け。

金属球は接地されていなくても、金属球がもともと電荷を持っていない場合には、一様な電場中では問 12 で求めた電荷分布と同じ電荷分布が現れることが知られている。

問 13 図 6 のように、一様な電場中に同じ大きさの金属球（接地されていない。もともと電荷を持っていない）を 2 つ離しておいたとき、2 つの球の間にはたらく力は引力となるか、斥力となるかを、(a), (b) それぞれの場合について、2 つの球の表面に現れる電荷分布の様子を描いて議論せよ。

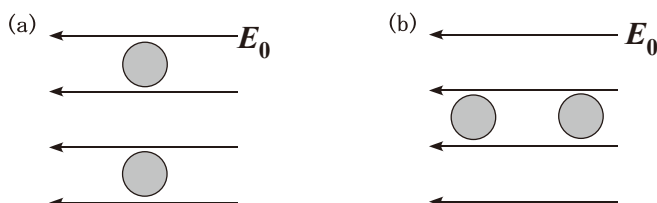


図 6

令和3年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理 課題I, II

解答例

R3

解答例

解答例：課題Ⅰ

出題の意図

摩擦や衝突による力や力積を理解しているかを確認する問題。またベクトルを扱う数学能力も試されている。設問の多くは最後の設問のヒントとなっている。

問1 摩擦力は $F = -\mu' mg$ なので、加速度は $-\mu' g$ である。時刻 $t = 0$ に初速度が u であれば、速度は

$$v = -\mu' gt + u \quad (1)$$

と変化する。速度が0となるのは $\tau = \frac{u}{\mu' g}$ である。円板の中心位置は

$$x = -\frac{\mu' g}{2} t^2 + ut \quad (2)$$

と変化するので、 $t = \tau$ での位置は

$$a = -\frac{u^2}{2\mu' g} + \frac{u^2}{\mu' g} = \frac{u^2}{2\mu' g} \quad (3)$$

が得られる。これを解くと、

$$\mu' = \frac{u^2}{2ga} \quad (4)$$

この結果を代入すると、

$$\tau = \frac{2a}{u} \quad (5)$$

が求まる。

問2 前問で求めたように $a = \frac{u^2}{2\mu' g}$ なので、距離を ℓ にするためには、初速度を $\sqrt{\frac{\ell}{a}}$ 倍すれば良い。

問3 運動量保存則より、円板 B も円板 A と同じ方向に動き一直線上を動いていることが分かる。円板 B が ℓ_B だけ進んだので、衝突直後の速度は $\sqrt{\frac{\ell_B}{a}} u$ であったことが分かる。静止していた質量 m の円板 B をこの速度にするための力積の大きさは

$$F \Delta t = mu \sqrt{\frac{\ell_B}{a}} \quad (6)$$

で、向きは円板 A, B の運動の向きと同じである。

問4 衝突直前の円板 A の速度を v_A , 衝突直後の円板 A, B の速度をそれぞれ v'_A, v'_B とすると, 運動量保存則と反発係数 e より

$$mv_A = m(v'_A + v'_B) \quad (7)$$

$$v'_A - v'_B = -ev_A \quad (8)$$

が得られる。ここから v_A を消去すると

$$(1+e)v'_A = (1-e)v'_B \quad (9)$$

である。従って

$$\ell_A = \frac{(v'_A)^2}{2g\mu'} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \frac{(v'_B)^2}{2g\mu'} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \ell_B \quad (10)$$

この関係を用いると, 初速度を測ることができなくても, ℓ_A と ℓ_B の測定から反発係数 e を求められる。

問5 衝突直後の円板 A の速度は

$$v'_A = \sqrt{\frac{\ell + 2a - b}{a}} u \quad (11)$$

である。前問の結果より, 衝突直前の速度は

$$v_A = \frac{2}{1-e} v'_A = \frac{2u}{1-e} \sqrt{\frac{\ell + 2a - b}{a}} \quad (12)$$

なので衝突直前の運動エネルギーは

$$\frac{m(v_A)^2}{2} = \frac{2mu^2}{(1-e)^2} \frac{\ell + 2a - b}{a} \quad (13)$$

である。衝突までに移動する距離 $b - 2a$ だけ進む間に摩擦による仕事は

$$W = \mu' mg(b - 2a) = mu^2 \frac{b - 2a}{2a} \quad (14)$$

である。摩擦により消費されたエネルギーと衝突直後の運動エネルギーの和が最初の運動エネルギーである。従って

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2a(1-e)^2} [(1-e)^2(b-2a) + 4(\ell - b + 2a)] \quad (15)$$

$$v = u \sqrt{\frac{(1-e)^2(b-2a) + 4(\ell - b + 2a)}{a(1-e)^2}} \quad (16)$$

R3

解答例

問4の結果より

$$\ell_B = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \ell_A = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 (\ell + 2a - b) \quad (17)$$

なので

$$x = b + \ell_B = b + \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 (\ell + 2a - b) = \ell + 2a + \frac{4e(\ell + 2a - b)}{(1-e)^2} \quad (18)$$

に円板Bの中心は静止する。

問6

$$\vec{v}_A' = -e\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (19)$$

$$\vec{v}_B' = e\vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\perp} \quad (20)$$

問7 トルクがかかるので、重心が動くだけでなく、円板が回転する。回転の速さは摩擦の大きさに比例するはずである。回転も摩擦により止められるが、トルクが大きければ止まるまでの回転角度が大きくなるはずである。円板に模様や印をつけ、回転による位置の変化と、重心の変化を比べれば、円板同士の摩擦による力と撃力の比を見積もれるはずである。

また円板Bの重心は中心と衝突点を結ぶ方向から少しずれる。しかし衝突点を正確に測定するのは難しいので、回転を調べる方が摩擦の効果を調べやすい。

問8 重心系での衝突前の円板Aの速度は

$$\vec{w}_A^{\dagger} = \frac{1}{2}(\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp}) \quad (21)$$

と表される。従って

$$\vec{w}_A' = \frac{1-e}{2}\vec{w}_{\parallel} + \vec{w}_{\perp} \quad (22)$$

$$\vec{w}_B' = \frac{1+e}{2}\vec{w}_{\parallel} \quad (23)$$

である。

問9 移動距離が r なので速さは $\sqrt{\frac{r}{a}}u$ である。速度ベクトルはPからGへ向かうので、速度ベクトルのBPに平行な成分は $-\sqrt{\frac{r}{a}}u$ である。

問10 円板はBからGへ向かうので、速度は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ の方向を向くので

$$(v'_{Bx}, v'_{By}) = \left(-u\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\theta, -u\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\theta \right) \quad (24)$$

である。

問11 衝突後の円板Bが目標Gに向かうのはP点が $[(a+r)\cos\theta, (a+r)\sin\theta]$ のときである。従って、A点の座標は $(x_A, y_A) = [(2a+r)\cos\theta, (2a+r)\sin\theta]$ である。

問12 衝突直前の速度は $\vec{v}_A = \alpha(x_A - \ell, y_A)$ である($\alpha > 0$)。問8の結果より $\vec{v}_A \cdot \vec{v}'_B > 0$ でなければならない。この不等式にこれまでの結果を代入すると、

$$(x_A - \ell)\cos\theta + y_A\sin\theta < 0 \quad (25)$$

$$-\ell\cos\theta + (2a+r) < 0 \quad (26)$$

$$\cos\theta > \frac{2a+r}{\ell} \quad (27)$$

問13 問12で求めた条件より、極座標で $r < \ell\cos\theta - 2a$ の範囲が求める領域である。角度 θ を変えながら、 $r, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を求めれば、図Aの青線の中が求める領域であることが示せる。 $r > 0$ なので $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 、つまり $|\theta| < 60^\circ$ だけが許される範囲である。

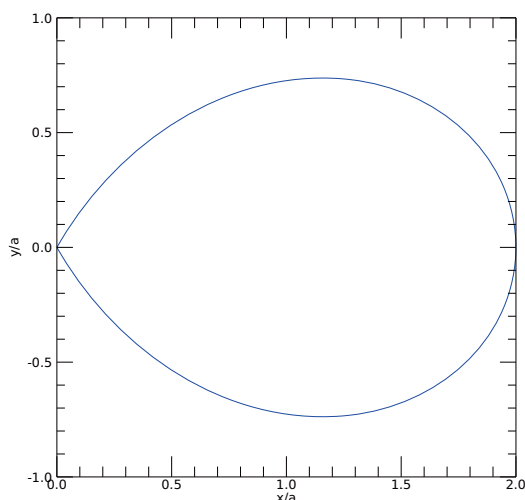


図 A

問14 円板Bの初期位置から目標Gまでの距離は $\frac{a}{2}$ なので衝突直後の速さは $\frac{\sqrt{2}}{2}u$ である。したがって衝突直後の円板Bの速度は $\vec{v}'_B = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}u, -\frac{3\sqrt{2}}{10}u \right)$ であることが分かる。

また衝突時の円板 A の中心は $(x_A, y_A) = \left(2a, \frac{3}{2}a\right)$ である。このことより衝突前の円板 A の速度は、 $\left(-2a, \frac{3}{2}a\right)$ と平行であることが分かるので、衝突直前の速度を

$$\mathbf{v}_A = \alpha u \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad (28)$$

とおく。この速度のうち BG に平行な成分は、

$$u_{A\parallel} = \mathbf{v}_A \cdot \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{25}\alpha u \quad (29)$$

と求められる。問 8 の結果を用いると

$$\frac{\sqrt{2}}{2}u = \frac{1+e}{2}v_{A\parallel} = \frac{\alpha}{5}u \quad (30)$$

が得られるので、 $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ である。

円板 A が出発点 $(\ell, 0)$ を離れるときの速度を βu (ただし $\beta > 0$) とすると、エネルギー保存則より

$$\frac{m\beta^2 u^2}{2} = \frac{m\alpha^2 u^2}{2} + m\mu'g \cdot \frac{5}{2}a \quad (31)$$

が得られる。これを整理すると

$$\beta^2 = \alpha^2 + \frac{5}{2} \quad (32)$$

なので $\beta = \sqrt{15}$ である。従って初速度が

$$\mathbf{v}_{A0} = \beta u \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{4\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}}{5}\right)u \quad (33)$$

のとき円板 B は目標 G で静止する。

解答例：課題II

出題意図

本問題は、静電誘導により金属表面に誘起される電荷の分布を調べる電磁気学の問題です。静電誘導自身は高校の物理で学ぶ内容ですが、その数理的な側面は大学初年度に学びます。高校の微積分が理解できていれば、指示に従い順次解答することで電荷分布を導き出せるように出題されています。この問題により、電磁気の基本的な考え方や関連する数理解能力、大学に入って教科書を読み進めることができるか等の能力を問います。

問1 図の微小領域中の“金属表面だけに電荷”があり、その電荷量は σS 。表面は平坦で“金属内では電場はゼロ”であるため、電気力線は、“表面に垂直に”表面の外側向きに出ていて、その数は $N = 4\pi k \cdot \sigma S$ 本である。電場の強さは、単位面積当たりの電気力線の数なので、

$$E = \frac{N}{S} = 4\pi k \cdot \sigma$$

となる。ちなみに、真空の誘電率 ε_0 を用いると

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

である。

問2 $V(P)$ は

$$V(P) = k \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + k \frac{q'}{\sqrt{(x-a')^2 + y^2}}$$

となる。表面($x=0$)で $V=0$ となるには、

$$q' < 0$$

であり、

$$\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{q'}{\sqrt{a'^2 + y^2}} = 0,$$

つまり

$$q^2(a'^2 + y^2) = q'^2(a^2 + y^2)$$

である。これが任意の y で成り立つためには、 $q^2 a'^2 = q'^2 a^2$ 、かつ $q^2 = q'^2$ である必要がある。この2式から $q' = \pm q$ 、 $a' = \pm a$ となり、 $q' < 0$ なので $q' = -q$ である。この時 $a' = a$ は置いた電荷を単に打ち消すだけの解のため不適であり、 $a' = -a$ と求まる。

問3 $\sigma(b)$ は、 $(x, y) = (0, b)$ での電場 $E = -\frac{dV(P)}{dx}$ を用いて

$$\sigma(b) = -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV(P)}{dx}$$

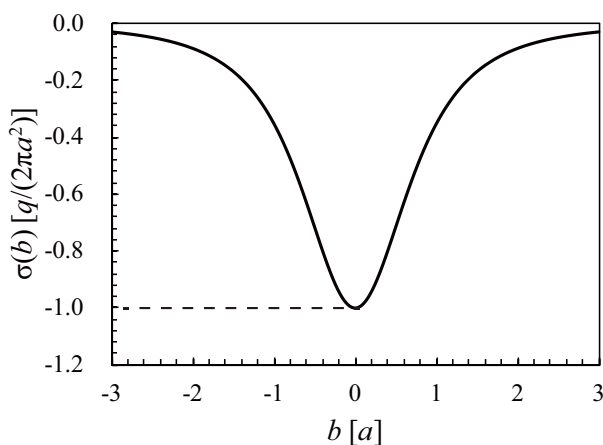
と表わされる。問2より

$$\frac{dV(P)}{dx} = kq \frac{-(x-a)}{\{(x-a)^2 + y^2\}^{3/2}} - kq \frac{-(x+a)}{\{(x+a)^2 + y^2\}^{3/2}}$$

なので、

$$\sigma(b) = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

となる。



R3

解答例

問4 Q' は

$$Q' = -qa \int_0^{+\infty} \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} db$$

となる。積分は $t = b^2$ と変数変換すると初等的に計算でき、 $Q' = -q$ となり、鏡像電荷 q' と同じになる。

問5 第2項は、電荷 q と $\sigma(b)$ 間のクーロン力（負になるので引力）、第1項はその x 成分（ x 方向への射影）をとるための項である。

$$F = \left| -kq^2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{b}{(b^2 + a^2)^3} db \right|$$

となり、積分は $t = b^2$ と変数変換すれば初等的に計算でき、

$$F = k \frac{q^2}{4a^2}$$

となる。これは電荷 q と鏡像電荷 q' 間のクーロン引力

$$-k \frac{qq'}{(2a)^2}$$

と大きさが一致する。

問6

$$V(P) = k \frac{q}{\sqrt{(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta)^2}} + k \frac{q'}{\sqrt{(r \cos \theta - a')^2 + (r \sin \theta)^2}}$$

となる。表面 ($r = R$) で $V = 0$ となるには、 $q' < 0$ であり、また

$$q^2(R^2 + a'^2 - 2Ra' \cos \theta) = q'^2(R^2 + a^2 - 2Rac \cos \theta)$$

が任意の $\cos \theta$ で成り立てばよい。つまり、

$$q^2(R^2 + a'^2) = q'^2(R^2 + a^2)$$

$$q^2Ra' = q'^2Ra$$

が成立すればよく、この2式から

$$q' = \pm \frac{R}{a} q$$

$$a' = \frac{R^2}{a}$$

が得られる。これより

$$q' = -\frac{R}{a} q$$

$$a' = \frac{R^2}{a}$$

R3

解答例

と求まる。

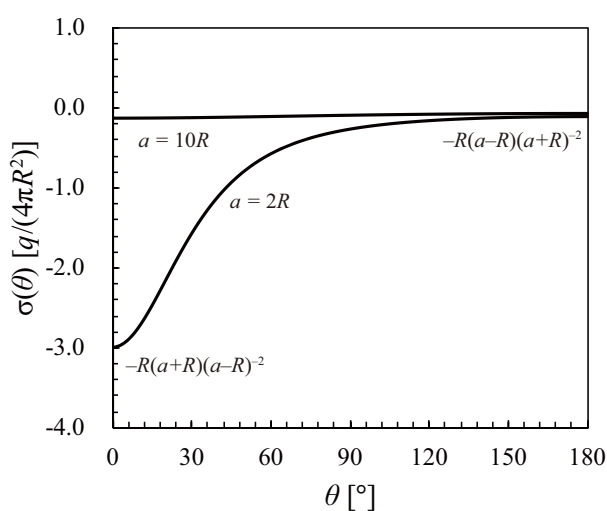
問7 問3と同様に $r = R$ での電場を用いると、 $\sigma(\theta)$ は

$$\sigma(\theta) = -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV(P)}{dr}$$

であるから、問6の $V(P)$ を代入して実行（微分して a' , q' , $r = R$ を代入）すると、

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi R} \frac{a^2 - R^2}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta)^{3/2}}$$

と求まる。



R3

解答例

問8 E_0 は

$$E_0 = 2 \times k \frac{q}{a^2}$$

なので、

$$q = \frac{E_0 a^2}{2k}$$

となる。また、

$$V_1(P) = \frac{E_0}{2} \frac{a^2}{(r^2 + a^2 - 2racos\theta)^{1/2}} - \frac{E_0}{2} \frac{a^2}{(r^2 + a^2 + 2racos\theta)^{1/2}}$$

となる。

問9 $V_1(P)$ は

$$V_1(P) = \frac{E_0 a}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{r}{a} \cdot \cos \theta \right\}^{-1/2} - \frac{E_0 a}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 2 \cdot \frac{r}{a} \cdot \cos \theta \right\}^{-1/2}$$

である。ここで $\frac{r}{a} \ll 1$ として近似すると、

$$V_1(P) \cong \frac{E_0 a}{2} \left\{ 1 + \frac{r}{a} \cos \theta - \left(1 - \frac{r}{a} \cos \theta \right) \right\} = E_0 r \cos \theta$$

となる。

問10 鏡像位置を A' , C' とすると, $V_2(P)$ は

$$\begin{aligned} V_2(P) &= \frac{kq'}{PA'} + \frac{-kq'}{PC'} \\ &= \frac{kq'}{(r^2 + a'^2 - 2ra' \cos \theta)^{1/2}} + \frac{-kq'}{(r^2 + a'^2 + 2ra' \cos \theta)^{1/2}} \end{aligned}$$

となる。 a' と q' を代入すると、

$$\begin{aligned} V_2(P) &= -\frac{E_0 a}{2} \left\{ \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{R}{a} \cos \theta \right\}^{-1/2} \\ &\quad + \frac{E_0 a}{2} \left\{ \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \left(\frac{R}{a} \right)^2 + 2 \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{R}{a} \cos \theta \right\}^{-1/2} \\ &= -\frac{E_0 a}{2} \frac{R}{r} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{R^2}{ra} \right)^2 - 2 \frac{R^2}{ra} \cos \theta \right\}^{-1/2} - \left\{ 1 + \left(\frac{R^2}{ra} \right)^2 + 2 \frac{R^2}{ra} \cos \theta \right\}^{-1/2} \right] \\ &\cong -\frac{E_0 a R}{2r} \left\{ \left(1 + \frac{R^2}{ra} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{R^2}{ra} \cos \theta \right) \right\} \\ &= -E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

が得られる。

問11 等電位線は、

$$V_2 = -E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta = \phi$$

であるから、

$$r^2 = \gamma \cos \theta$$

である。ただし

$$\gamma = -\frac{E_0 R^3}{\phi}$$

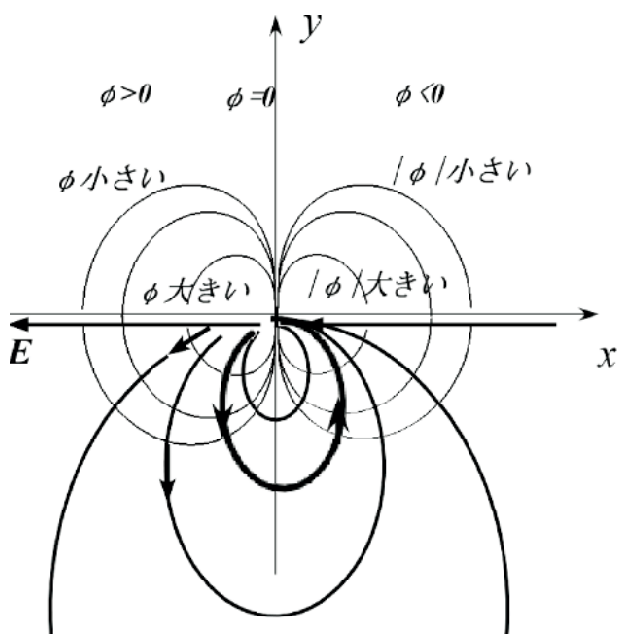
である。デカルト座標で書くと、

$$r^3 = (x^2 + y^2)^{3/2} = \gamma x$$

となる。故に、

$$y = \pm \sqrt{|\gamma|^{2/3} |x|^{2/3} - x^2}$$

の曲線となる。特に、正の電位 $\phi > 0$ は $\gamma < 0$ なので $x < 0$ 領域のみに存在、負の電位 $\phi < 0$ は $\gamma > 0$ なので $x > 0$ 領域のみに存在、また $x = 0$ が $V_2 = \phi = 0$ 。例えば $\phi < 0$ なら、曲線は $0 \leq x \leq \sqrt{\gamma}$ の範囲のみに存在し、 $x = \sqrt{\gamma}/3^{4/3}$ で y は極値を持つ。また $|\phi|$ が大きいと $|\gamma|$ が小さい曲線となる。以上に注意して図を描くと次の図のようになる。また、電気力線は電位の高いところから低い方に、等電位の曲線に直交してつないでいく（図の矢印太線）。



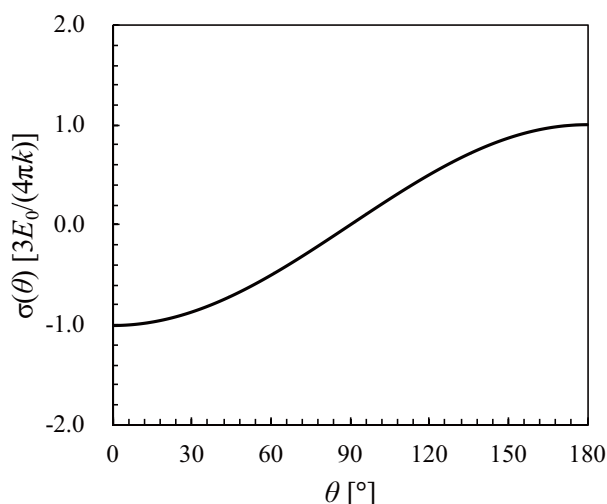
R3

解答例

問12 問3, 問7と同様に計算すると,

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \frac{1}{4\pi k} \left(-E_0 \cos\theta - 2E_0 \frac{R^3}{R^3} \cos\theta \right) \\ &= -\frac{3}{4\pi k} E_0 \cos\theta\end{aligned}$$

となる。



問13 問11の結果から、一様電場中の金属球は、球の $+x$ 方向に負、 $-x$ 方向に正の電荷が誘起されている。(a) 2つの球が電場方向に真横に(例えば y 軸上に)並ぶと、2つの球の正と正、負と負の電荷どうしが、異符号の電荷より近いことになり、球間には斥力がはたらく。一方、(b) 2つの球が電場方向に(例えば x 軸上に)並ぶと、球間側に誘起された正負の電荷が同符号の電荷より近くにあるので、球間には引力がはたらく。(異符号の電荷どうしは近い距離と遠い距離にあり、同符号の電荷どうしはその間の距離にあるため、引力と斥力の競争となる)

R3

解答例

令和 2 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理

課題 I, II

(9:00－15:00)

注意事項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 問題冊子に印刷または製本の不具合がある場合は、手を上げて申し出て下さい。
3. 課題 I および課題 II の問題すべてに解答してください。
4. 解答用紙は課題ごとに分けて使用してください。解答用紙は何枚使用しても構いません。全ての解答用紙に受験番号を必ず記入して下さい。
5. 携帯電話やスマートフォン等の電子機器はすべて電源を切り、カバンにしまってください。
6. その他、監督者の指示に従って下さい。

[I]

下図のように、一様重力下で頂点を真下にして置かれた直円錐の内側の面上を、質量 m の小球が摩擦なしに運動している。円錐面は上方に十分高く、小球が円錐面から外に飛び出すことはない。円錐の頂点を原点 O とし、円錐の中心軸を z 軸とする直交座標 (x, y, z) を定義し、小球の位置を $Q(x, y, z)$ とする。また、これの xy 面への射影を $P(x, y)$ とする。円錐の頂角の半分を α (時間によらない定数であり、 $0 < \alpha < \pi/2$) とすると、小球の位置 (x, y, z) は、原点 O から点 Q までの距離 r と線分 OP が x 軸と成す角 θ を用いて、

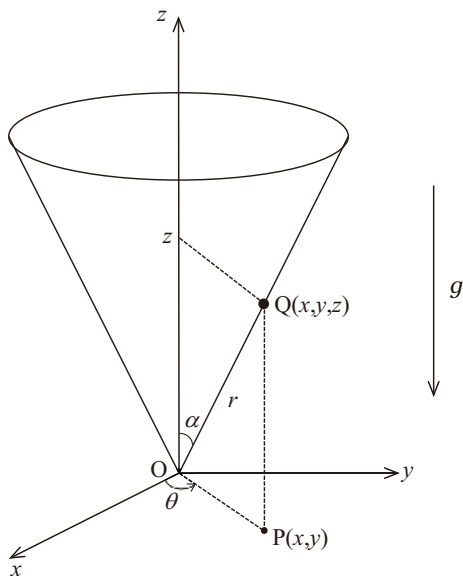
$$x = r \sin \alpha \cos \theta \quad (1)$$

$$y = r \sin \alpha \sin \theta \quad (2)$$

$$z = r \cos \alpha \quad (3)$$

と書かれる。したがって、任意の時刻 t における小球の位置、すなわち小球の運動は、2つの変数 r と θ の t 依存性 $r(t)$ と $\theta(t)$ が分かれば、完全に記述できる。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えなさい。

なお、この問題文の最後に付けた数学の公式を、必要ならば証明なしに用いて良い。



問1 小球の速度 $\vec{v}$ は、小球の位置 (x, y, z) の時間微分として

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (4)$$

と定義される。この式の右辺のそれぞれの成分を、 r , θ , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, および α を用いて表しなさい。なお、例えば x の時間に関する一階微分を $\dot{x}$, 二階微分を $\ddot{x}$ などという記号を用いて解答しても良い。

問2 小球の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \quad (5)$$

と書かれる。これを, r , θ , $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, および α を用いて表しなさい。

問3 重力による小球の位置エネルギー U を r と α を用いて表しなさい。ただし, 位置エネルギーの原点を円錐の頂点の位置にとる。

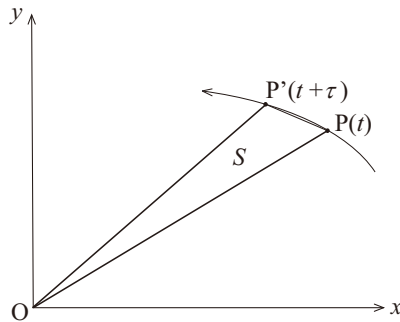
さて, 点 P の xy 面での運動は, 常に定点 O に向かう力による運動であり, この場合にも, ケプラーが惑星の運動に対して見出した面積速度一定の法則が成り立つ。下図のように, xy 面上の点 P の運動を考えると, 時刻 t での点 P の位置を (x, y) とすれば, 微小時間 τ (> 0) 経った後の点 P (P' とする) の位置は, 時刻 t での点 P の速度が $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ なので,

$$\left(x + \frac{dx}{dt}\tau, y + \frac{dy}{dt}\tau \right) \quad (6)$$

と与えられる。三角形 OPP' の面積 S (> 0) は微小時間 τ に比例して増加する ($S \propto \tau$) が, その比例係数は面積速度と呼ばれ, $\frac{dS}{dt}$ と書かれる。すなわち, τ が十分小さいとき,

$$S \doteq \frac{dS}{dt} \tau \quad (7)$$

である。まずは, 本問に即して, この面積速度が時刻 t にらず一定であることを証明しよう。



問4 点 P の xy 面上の運動について, その面積速度が

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} (r \sin \alpha)^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (8)$$

と与えられることを示しなさい。 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ は回転角速度と呼ばれる。

問5 点 Q の小球について、その運動方程式の x 成分、 y 成分を、 $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, θ , α , および小球に働く原点 O に向かう力 F を用いて表しなさい。またその結果と、式 (1)、式 (2) を用いて、

$$\frac{d^2S}{dt^2} = 0 \quad (9)$$

であることを示しなさい。すなわち、面積速度は時刻 t によらず一定である。

以下では、問4で求めた面積速度を $\ell/(2m)$ とおく。すなわち、時刻 t によらず

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} \sin^2 \alpha = \ell \text{ (一定)} \quad (10)$$

が成り立つ。これを用いて次の問いに答えなさい。

問6 小球の全エネルギー $E = K + U$ は、式 (10) を用いて $\frac{d\theta}{dt}$ を消去して表すと、

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V(r) \quad (11)$$

と書くことができる。ここで、 r の関数 $V(r)$ は、問3で求めた r の関数 $U(r)$ を用いて、

$$V(r) = \frac{A}{2r^2} + U(r) \quad (12)$$

と与えられる。定数 A を求めなさい。さらに、 $V(r)$ の概形を r を横軸にとって図に描きなさい。

前問の結果の式 (11) はエネルギー保存則を表しており、この小球の運動が、回転の効果を含んだ有効的な位置エネルギー $V(r)$ を持つ、 r 方向の1次元運動として記述できることを示している。位置エネルギーが $r = r_0$ で最小値をとるとして、以下の問いに答えなさい。

問7 全エネルギーが $E = V(r_0)$ であれば、つねに $dr/dt = 0$ なので小球は円運動する。このことを利用して、小球が $r = r_0$ で円運動しているときの式 (10) の ℓ と、回転角速度 ω_0 を、 r_0 を用いて表しなさい。

問8 式 (12) の $V(r)$ は、 $r \rightarrow 0$ でも $r \rightarrow \infty$ でも $+\infty$ に発散するので、小球は必ず r の有限な領域 ($0 < r < \infty$) に閉じ込められている。全エネルギーが $V(r)$ の最小値より大きく [$E > V(r_0)$]、小球が最小値 $r_{\min}$ から最大値 $r_{\max}$ の範囲を運動している場合について、以下の問いに答えなさい。

(1) 小球の全エネルギーを E として、問6で描いた $V(r)$ の図に、小球の可動領域 ($r_{\min}, r_{\max}$)、および位置 r_0 を書き入れなさい。

(2) 次の関係式を証明しなさい。

$$\frac{2r_{\min}^2 r_{\max}^2}{r_{\min} + r_{\max}} = r_0^3 \quad (13)$$

ここで r_0 は問 7 で求めたものである。

(3) 次式を証明しなさい。ただし $B = mg \cos \alpha$ である。

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -\frac{B}{r^2} (r - r_{\min})(r - r_{\max}) \left(r + \frac{r_{\min}r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}} \right) \quad (14)$$

これより $(r - r_{\min})(r - r_{\max}) \leq 0$ でなければならない。したがって、 r は $r_{\min}$ と $r_{\max}$ の間を往復し、点 P は xy 面上で半径 $r_{\min} \sin \alpha$ と $r_{\max} \sin \alpha$ のふたつの同心円の間に周期運動することになる。

次に、問 7 の円運動をしている小球に対し、式 (10) の ℓ の値を変えないようにして、小さなエネルギー Δ を加える。そうすると小球は、 $r = r_0$ の周りで r をわずかに変えるような小さな振動を始めた。この振動による r の変化を δ として、 $r(t) = r_0 + \delta(t)$ とする ($|\delta(t)| \ll r_0$)。以下の問いに答えなさい。

問 9 $|\delta|$ が r に比べて十分小さいので、位置エネルギー $V(r)$ の式は

$$V(r) = V(r_0) + \frac{1}{2} k \delta^2 \quad (15)$$

と近似できる。ここで k は $\frac{d^2V(r)}{dr^2}$ の $r = r_0$ での値である。 k の具体的な式を求めなさい。上式の右辺第 2 項は、ばね定数 k 、変位 δ のばねの位置エネルギーとみなすことができる。この微小振動の角振動数 ω_r を求めなさい。

問 10 比 ω_r/ω_0 を α を用いて表しなさい。振動の角振動数 ω_r が、問 7 で求めた円運動の角振動数 ω_0 と一致するとき、 α の値を求めなさい。以下ではこれを α_0 と書く。

問 11 問 9 より、 r の時間依存性 $r(t)$ は、 $\delta(t) = \rho \cos \omega_r t$ ($0 < \rho \ll r_0$) として、

$$r(t) \doteq r_0 + \rho \cos \omega_r t \quad (16)$$

と書くことができる。 ρ は微小振動の振幅である。またこのとき、 θ の時間依存性 $\theta(t)$ は、式 (10) により、

$$\theta(t) \doteq \omega_0 t - 2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_r} \right) \left(\frac{\rho}{r_0} \right) \sin \omega_r t \quad (17)$$

と書くことができる。 $\alpha = \alpha_0$ を仮定して、 $\omega_0 = \omega_r$ 、 $\rho = r_0/10$ の場合を考える。

(1) r と θ の関係を、 θ を横軸に、 r を縦軸にして、図に描きなさい。

(2) 点 P(x, y) の軌跡の概形を xy 面上に描き、運動の様子を簡単に説明しなさい。

問 12 ふたつの周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ と $T_r = 2\pi/\omega_r$ を定義する。一般にこれらの比が有理数となるとき、すなわち

$$\frac{T_0}{T_r} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は正の整数}) \quad (18)$$

となるとき， xy 面上の小球の軌跡は閉じた軌跡となる。言い換えれば，一定時間ごとに小球は同じ運動を繰り返す。 $p = 3, q = 2$ のとき，点 $P(x, y)$ の軌跡の概形を xy 面上に描きなさい（軌跡のつながり方が分かるように線に番号をつけること）。またそのときの α の値を求めなさい。さらに， r と θ の関係を， θ を横軸に， r を縦軸にして，図に描きなさい。

数学公式

- (i) u, v が時刻 t の関数 $u(t), v(t)$ のとき、関数 $f(t) = u(t) + v(t)$ の t 微分は

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt} \quad (19)$$

である。この式は、関数の変数 (t) を省略して、しばしば

$$\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \quad (20)$$

と書かれる。以下では、このように変数 (t) を省略した公式のみを示す。また、問題文の本文でも、この省略した表記を用いている。

- (ii) u, v が時刻 t の関数のとき、関数 $f = uv$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt} \quad (21)$$

である。

- (iii) φ が時刻 t の関数のとき、関数 $f = \sin \varphi$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad (22)$$

であり、関数 $f = \cos \varphi$ の t 微分は

$$\frac{df}{dt} = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad (23)$$

である。

- (iv) 座標平面上の3点 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$ に対して、三角形 OAB の面積は

$$S = \frac{1}{2} |ad - bc| \quad (24)$$

と与えられる。

- (v) $r > 0$ として、 $|\delta| \ll r$ のとき、近似式

$$\frac{1}{(r + \delta)^2} \doteq \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\delta + \frac{3}{r^4}\delta^2 \quad (25)$$

が成り立つ。

[II]

導線やケーブルの形状や大きさはよく考えられて設計されている。以下の問いに答え、その特徴を分析しよう。

問1 半径 a 、長さが ℓ の円柱状の導線の両端に一定の電圧 V をかけると、円柱の断面では単位面積あたりの電流（電流密度）が一定になる。このことを示すために、導線を円柱の軸に平行な平面で2分割し、2本の並列抵抗にするという思考実験をしてみよう。分割された円柱の断面を S_1, S_2 （ただし $S_1 + S_2 = \pi a^2$ ）として、それぞれの抵抗値を求め、流れる電流は断面積に比例することを示しなさい。ただし導線の素材の抵抗率 ρ は一定とする。

問2 次に導線の断面積が軸に沿って一定になっている理由を考えよう。図1に示すように導線の断面積 S が次式のように軸に沿って S_1 から S_2 に一定の割合で緩やかに変化する場合を考える。

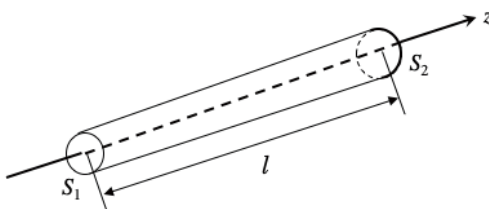


図1 断面積が S_1 から S_2 に変化する、長さ ℓ の抵抗

$$S = S_1 + \frac{(S_2 - S_1)}{\ell} z \quad (1)$$

ここで z は導線の軸に沿った座標で、 $0 \leq z \leq \ell$ である。抵抗の値は太さの異なる導線が直列につながった場合と同様の考え方で求められる。求めた抵抗の値を平均の断面積

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2}{2} \quad (2)$$

と、変化の度合いを表す変数

$$\alpha = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2} \quad (3)$$

を用いて表しなさい。

問3 平均の断面積と $\bar{S}$ と長さ ℓ を固定したとき、問2で求めた抵抗が最小となるのは断面積が一定 ($\alpha = 0$) のときであることを示しなさい。

問4 多量の電気を流すためには、太い導線を使う必要がある。直径が 1.0 mm で長さが 5.0 m の2本の銅線を使い、100Vの直流電源と 500W の電力を消費する機器を結ぶ電源ケーブルを作成した。この電源ケーブルに発生するジュール熱を求めなさい。ただし銅の抵抗率は $1.55 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ とする。電源ケーブルとするには、互いに同じ大きさで符号の異なる電流を通す導線2本が必要であることに気をつけなさい。

細い直線状の導線に電流 I が流れると、導線からの距離が r の場所には $H = \frac{I}{2\pi r}$ の強さの磁場ができる (アンペールの法則)。導線やケーブルの形状は、電流を流したときに周囲に磁場が少なくなるように設計されていることを確認しよう。

問 5 交流回路に使われる導線のモデルとして、直交座標で $(x, y) = (a, 0)$ を通り $+z$ 方向に電流 I が流れ、 $(x, y) = (-a, 0)$ を通り $-z$ 方向に電流 I が流れる場合を考える。どちらの電流も z 方向に十分長い距離を一樣に流れている。この時の磁場の y 成分 H_y を求め、 $y = 0$ の xz 面での値を x の関数として、 $x = 0$ の yz 面での値を y の関数としてグラフに表しなさい。

問 6 前問で 2 本の電流の間の距離 $d = 2a$ だけを短くした場合、 $(x, y) = (0, 0)$, $(r, 0)$, $(0, r)$ の点での磁場の強さがどのように変化するか、 $r > d$ として論じなさい。

問 7 図 2 のように半径 r の円の中心から $a (< r)$ だけずれた場所を、紙面に垂直な導線上を裏から表に電流 I が流れている。このとき、電流が流れているところから反時計回りに角度 θ だけずれた円周上の点、 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 、での磁場の強さ H と、円に沿った方向の成分 H_θ を求めなさい。

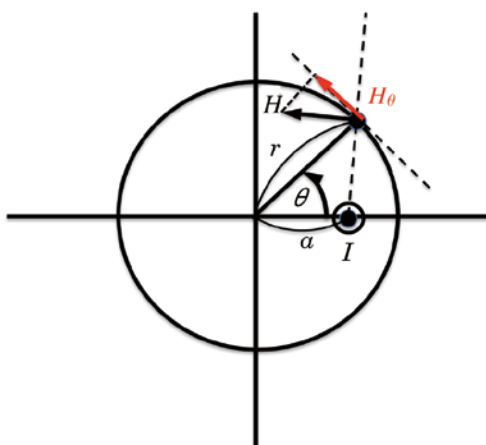


図 2. 半径 r の円の中心から a だけ離れたところを流れる電流による磁場。

ヒント: 極座標で (r, θ) の点で、円の中心とこの点を結ぶ線分に垂直で、 θ が増える向きの長さ 1 のベクトルは $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ と表せる。

問 8 前問で求めた H_θ を円周上で平均した値は

$$\langle H_\theta(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_\theta(r, \theta) d\theta = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (4)$$

となることを示しなさい。

ヒント: 三角関数の積分は $x = \tan \frac{\theta}{2}$ により置換すると簡単な形に変形できることがある。

また不定積分 $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ は、 $x = \tan t$ とすると積分しやすい形に置き換えられる。

式 (4) は

$$2\pi r \langle H_{\theta}(r) \rangle = \begin{cases} I & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (5)$$

と書き換えることができる。式 (5) は円周上の磁場の強さの平均と円周の積がその中を流れる電流と等しいことを示していて、導線が有限の太さを持っている場合や複数ある場合にも成り立つことが知られている。

問 9 図 3 に示すような同軸ケーブルでは、半径 $r \leq a$ と $r = b$ のところだけが導体で、両者には常に反対向きで同じ大きさの電流が流れている。同軸ケーブルの半径 $r \leq a$ の部分に電流 I が流れているとき、その周囲にできる磁場の強さを、中心軸からの距離 r の関数として求め、グラフに表しなさい。

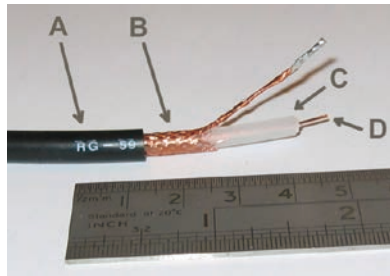


図 3. 同軸ケーブル RG-59 の構造。A: シース (保護被膜 ビニール) B: 外部導体 (網組み銅線) C: 絶縁体 (ポリエチレン) D: 内部導体 (軟銅線) Wikipedia より転載。

問 10 式 (5) と似た式は、円だけでなく、正方形でも成り立つ。辺の長さが $2a$ である正方形の中心に電流 I が流れている場合を考え、各辺について辺の方向の磁場成分を積分したもの (これは磁場の平均値と辺の長さの積と等しい) を求めなさい。この計算では、各辺が反時計回りにつながるよう注意して積分すること。

問 11 前問の結果を利用して、単位長さあたり n 回巻いた無限に長い円筒状のコイルの中心には、強さ nI の磁場ができることを説明しなさい。

問 12 問 4, 5 で考えた平行な 2 本の導線は交流用の導線のモデルである。交流用の導線や、同軸ケーブルは外部に磁場が発生しにくい形状になっている。これは何のためだろうか。磁場が発生する場合にどのような問題が生じるか述べなさい。

課題Ⅱ 問9 図3 (p. 10) の出典

ウィキメディア・コモンズ (Wikimedia Commons)

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RG-59.jpg?uselang=ja>

この画像はクリエイティブ・コモンズ 表示-継承 3.0 非移植 ライセンスのもとに利用を許諾されています。(https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.ja)

令和 2 年度

千葉大学先進科学プログラム入学者選考課題

課題論述 物理 課題 I, II

解答例

R2

解答例

[I]

[出題意図]

ニュートンのプリンキピアにも登場する倒立円錐面内の小球の運動という有名な問題を、高校で学習する力学と数学を用いて解析させる。

まず座標系の変換に関する問題に解答させ、 r と θ の時間依存性が分かればこの系の運動が必要十分に記述できることを理解させる。また、面積速度一定の法則が本問の場合にも成立することを証明させる。次に、エネルギー保存則と面積速度一定の法則から、この系の基本となる方程式を導かせる。どちらにも、微分に関する数学 III レベルの知識を要求している。その後、具体的な運動の様子に関する設問があり、円運動の場合や、それから外れた運動に関して考察させる。特に微小な振動の場合に関して定量的な解析を行わせ、この系の運動に関する理解を深めさせる。

ここでは主に微小振動を考察したが、大きな振幅の振動の場合にもさらなる想像力を働かせることで、簡単な設定のなかに隠された複雑な運動の解析という力学本来の魅力に、本問が少しでも接近するヒントを提供できればと考えている。

問 1

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \alpha \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r \sin \alpha \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \alpha \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r \sin \alpha \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \alpha \quad (3)$$

問 2

$$K = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \quad (4)$$

問 3

$$U = mgr \cos \alpha \quad (5)$$

問 4 $P(x, y)$ および $P' \left(x + \frac{dx}{dt} \tau, y + \frac{dy}{dt} \tau \right)$ として、三角形 OPP' の面積は、数学公式を用いて、

$$S = \frac{1}{2} \left[x \left(y + \frac{dy}{dt} \tau \right) - y \left(x + \frac{dx}{dt} \tau \right) \right] = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \tau \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} r \sin \alpha \cos \theta \left(\frac{dr}{dt} \sin \alpha \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r \sin \alpha \cos \theta \right) \tau \quad (7)$$

$$- \frac{1}{2} r \sin \alpha \sin \theta \left(\frac{dr}{dt} \sin \alpha \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r \sin \alpha \sin \theta \right) \tau \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} (r \sin \alpha)^2 \frac{d\theta}{dt} \tau \quad (9)$$

R2

解答例

よって

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} (r \sin \alpha)^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (10)$$

となる。

問5 運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F \sin \alpha \cos \theta \quad (11)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -F \sin \alpha \sin \theta \quad (12)$$

である。また、上式(1), (2) を t でさらに微分して、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \alpha \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \theta - r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \alpha \sin \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \alpha \cos \theta \quad (13)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \alpha \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \cos \theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \alpha \cos \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \alpha \sin \theta \quad (14)$$

を得る。これらより、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \sin \alpha \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \sin \theta - r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \alpha \sin \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \alpha \cos \theta = -\frac{F}{m} \sin \alpha \cos \theta \quad (15)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \sin \alpha \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \alpha \cos \theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \sin \alpha \cos \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \alpha \sin \theta = -\frac{F}{m} \sin \alpha \sin \theta \quad (16)$$

さらに、式(15) $\times \sin \theta$ - 式(16) $\times \cos \theta$ より

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (17)$$

であり、 $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{一定}$ となる。これにより面積速度一定が証明される。

問6

$$V(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha \quad (18)$$

$$= \frac{A}{2r^2} + Br \quad (19)$$

$$A = \frac{\ell^2}{m \sin^2 \alpha} \quad (20)$$

$$B = mg \cos \alpha \quad (21)$$

$V(r)$ のグラフは図1に示した通り。

R2

解答例

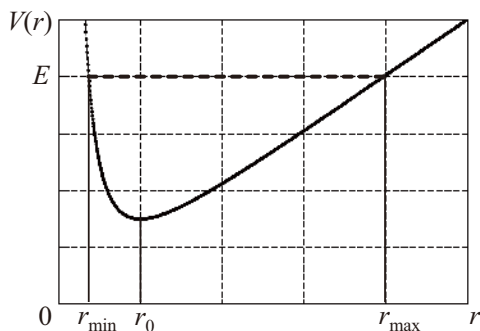


図 1: $V(r)$ の r 依存性。破線は全エネルギーが E の場合の可動領域を示す。

問 7 $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ を満たす r が r_0 だから,

$$\ell = \sqrt{m^2 g r_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha} \quad (22)$$

$$(23)$$

またそのとき、本問式 (10) より

$$\omega_0 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{m r_0^2 \sin^2 \alpha} \quad (24)$$

この 2 式より ℓ を消去して

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{r_0 \sin^2 \alpha}} \quad (25)$$

これは、円運動ならば必ず成立する式である。この問題では振動数に興味があるので $\omega = \frac{d\theta}{dt} > 0$ の場合だけを答えたが、 ℓ や ω_0 に複号 ($\pm$) を残しておいてもよい。

問 8 (1) 図 1 の通り。

(2) $r = r_{\min}, r = r_{\max}$ の点では動径方向の速度は $\frac{dr}{dt} = 0$ なので,

$$V(r_{\min}) = V(r_{\max}) \quad (26)$$

となる。これより

$$\frac{A}{2r_{\min}^2} + B r_{\min} = \frac{A}{2r_{\max}^2} + B r_{\max} \quad (27)$$

である。また、 $V(r)$ が最小となる点 $r = r_0$ は

$$r_0^3 = \frac{A}{B} \quad (28)$$

を満たす。これらより題意の式が証明される。

R2

解答例

(3) 本問式 (11), (12) を変形する。 $r = r_{\min}$ および $r = r_{\max}$ の点においては, 動径方向の速度は $\frac{dr}{dt} = 0$ となるので, 右辺は因子 $(r - r_{\min})(r - r_{\max})$ を含まなければならない。また, 本問式 (13) を用いる。

問 8(3) で述べられているふたつの同心円は次頁の図 2 に表記した。

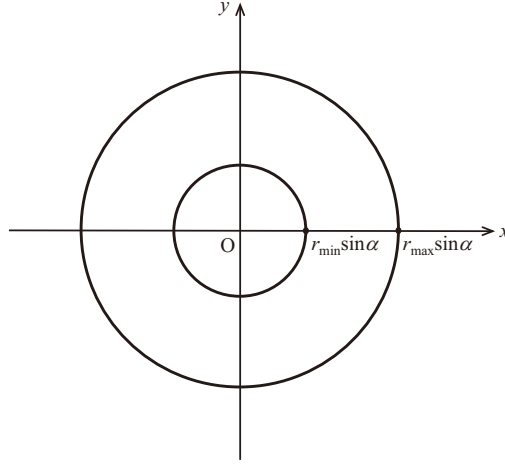


図 2: 半径 $r_{\min} \sin \alpha$ と $r_{\max} \sin \alpha$ のふたつの同心円。

問 9

$$k = \left. \frac{d^2 V(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0} = \frac{3\ell^2}{mr_0^4 \sin^2 \alpha} \quad (29)$$

これを用いて

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{m^2 r_0^4 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}\ell}{mr_0^2 \sin \alpha} \quad (30)$$

問 10

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{3} \sin \alpha \quad (31)$$

また, $\omega_r = \omega_0$ より $\sin \alpha = 1/\sqrt{3}$. すなわち $\alpha = \sin^{-1}(1/\sqrt{3}) \simeq 35.3^\circ$.

R2

解答例

問 11 (1) 図 3 の通り。

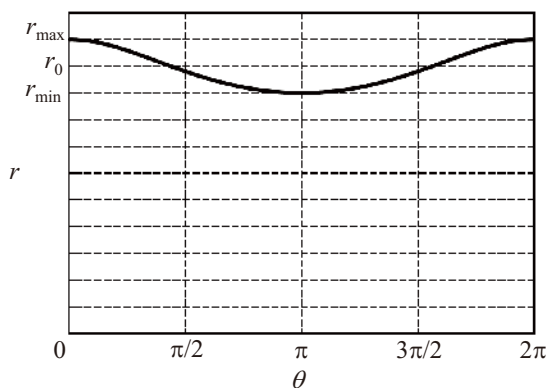


図 3: 問 11 (1) の解答。

(2) 軌跡は、図 4 のように、点線で示す内接円と外接円に囲まれた歪んだ円となる。

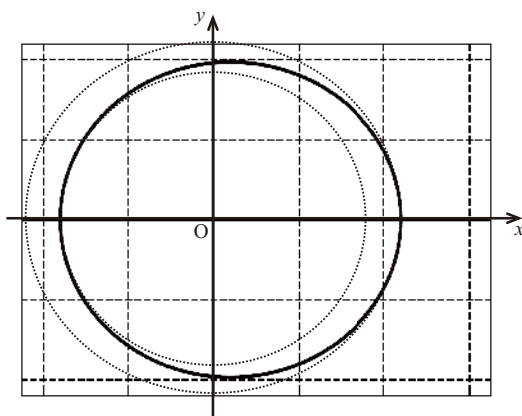


図 4: 問 11 (2) の解答。点線は半径 $r_{\min} \sin \alpha$ と $r_{\max} \sin \alpha$ のふたつの同心円を表す。

R2

解答例

問 12 点 P の軌跡は図 5 に示す通り。小球は番号の順に運動する。また、 $3/2 = \sqrt{3} \sin \alpha$ より $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, つまり $\alpha = 60^\circ$ である。

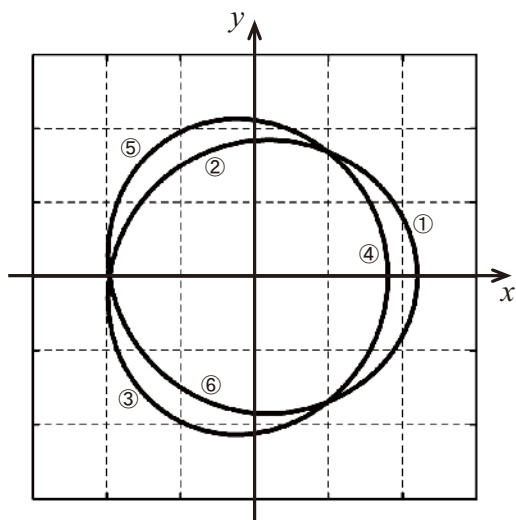


図 5: 問 12 の解答（前半）。小球は 2 回 回転する間に 3 回振動する。

r と θ の関係は図 6 に示す通りである。

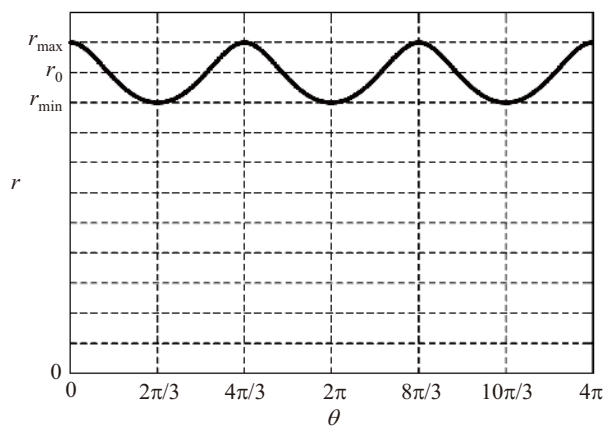


図 6: 問 12 の解答（後半）。小球は 2 回 回転する間に 3 回振動する。

[II]

[出題意図]

電気抵抗と電流がつくる磁場についての知識と計算能力を試している。前半は電気抵抗に関する問題で、問3では高度な数学的な能力を、問4ではジュール熱に関する理解度の高さを問うている。問5からの後半は磁場がつくる磁場を求める問題である。交流用の電源ケーブルや、同軸ケーブルでは周囲に磁場が漏れにくくなっていることを理解できるかを問うている。問7から問10は大学での学習に欠かせない、置換積分を理解しているか試す問題。やや難問なので、ヒントが与えてある。問11は考える力を試す問題で、理由を想像する力とそれを表現する能力を試している。

問1 並行に置かれているので、抵抗にかかる電圧も等しいことに注意すれば容易に求められる。

$$R_1 = \frac{\rho \ell}{S_1} \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{\rho \ell}{S_2} \quad (2)$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{V}{\ell \rho} S_1 \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{V}{\ell \rho} S_2 \quad (4)$$

問2 設問の指示に従うと、電気抵抗は次のように積分で表される。

$$R = \int_0^\ell \frac{\rho}{S} dz \quad (5)$$

$$= \begin{cases} \frac{\rho \ell}{S_2 - S_1} \ln \frac{S_2}{S_1} & (S_1 \neq S_2) \\ \frac{\rho \ell}{S_1} & (S_1 = S_2) \end{cases} \quad (6)$$

また与えられた条件より

$$S_1 = \bar{S}(1 - \alpha) \quad (7)$$

$$S_2 = \bar{S}(1 + \alpha) \quad (8)$$

が得られるので、これらを式(6)に代入して

$$R = \begin{cases} \frac{\rho \ell}{\bar{S}} \frac{1}{2\alpha} \log \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) & (\alpha \neq 0) \\ \frac{\rho \ell}{\bar{S}} & (\alpha = 0) \end{cases} \quad (9)$$

が得られる。得たい結果は $S_1 \neq S_2$ の場合なので、両端の断面積が等しい ($S_1 = S_2$) ときの場合分けしなくても、減点はしない。

問3 式(9)は α の偶関数であるので、 $\alpha > 0$ の場合に $\alpha = 0$ の場合より大きくなることを示せば

R2

解答例

良い。ここで関数

$$f(\alpha) = \log \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \quad (10)$$

を考えると,

$$f(0) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha^2} > 2 \quad (12)$$

である。従って、 $\alpha > 0$ では

$$f(\alpha) > 2\alpha \quad (13)$$

が得られる。従って $R \geq \rho\ell/\bar{S}$ である。電卓の使用が許されているので、 $\alpha = 0, 0.01, 0.02, \dots$ を代入することにより示してもよい。

問4 直径を ϕ 、導線の長さを ℓ とすると、抵抗 R は

$$R = \frac{4\rho\ell}{\pi\phi^2} = 0.197 \, \Omega \quad (14)$$

となる。100 V の電圧で 500 W 消費するので、この機器の抵抗値は $20 \, \Omega$ である。導線の抵抗は 機器の抵抗の $1/100$ なので 5W ほどが導線で消費されてしまう。

問5 xy 面を横切る座標を (x_0, y_0) とすると、 z 軸に平行な電流 I が位置 (x, y) に生じる磁場の大きさは

$$H = \frac{I}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \quad (15)$$

向きは $\left[\frac{y_0 - y}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}, \frac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right]$ に平行なので

$$H_x = -\left(\frac{I}{2\pi}\right) \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (16)$$

$$H_y = \left(\frac{I}{2\pi}\right) \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (17)$$

と表される。従って設問の場合は

$$H_x = \frac{I}{2\pi} \left[-\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (18)$$

$$H_y = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (19)$$

となる。 $y = 0$ では

$$H_x = 0, \quad H_y = \frac{aI}{\pi(x^2 - a^2)} \quad (20)$$

R2

解答例

$x = 0$ では

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{aI}{\pi(a^2 + y^2)} \quad (21)$$

となる。 H_y はそれぞれは以下の図のように変化する。

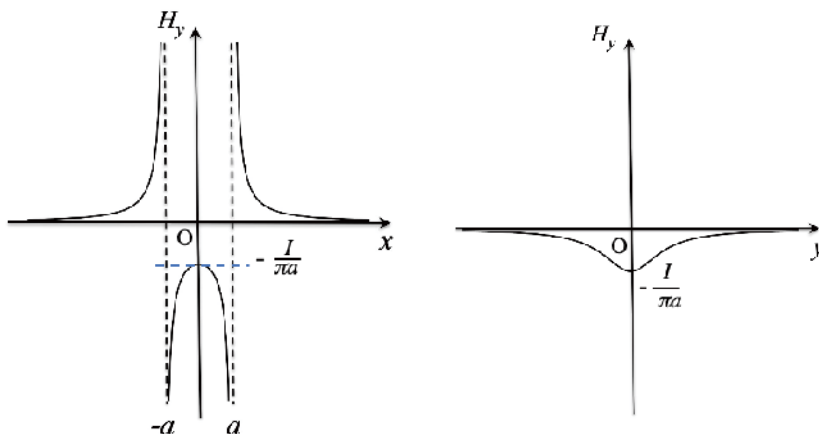


図3 (左) x 軸上と(右) y 軸上での磁場の強さ

問6 $(x, y) = (0, 0)$ での磁場は $(H_x, H_y) = \left(0, -\frac{2I}{\pi d}\right)$ で距離 d が短いほど磁場は強くなる。

$(x, y) = (r, 0)$ では $(H_x, H_y) = \left[0, \frac{2Id}{\pi(4r^2 - d^2)}\right]$ で、距離 d が短いほど磁場は弱くなる。

$(x, y) = (0, r)$ では $(H_x, H_y) = \left[0, -\frac{2Id}{\pi(4r^2 + d^2)}\right]$ で、距離 d が短いほど磁場は弱くなる。

問7

$$H = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(r \cos \theta - a)^2 + r^2 \sin^2 \theta}} \quad (22)$$

$$H_x = \frac{I}{2\pi} \frac{r \sin \theta}{(r \cos \theta - a)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \quad (23)$$

$$H_y = \frac{I}{2\pi} \frac{r \cos \theta - a}{(r \cos \theta - a)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \quad (24)$$

$$H_\theta = -H_x \sin \theta + H_y \cos \theta \quad (25)$$

$$= \frac{I}{2\pi} \frac{r - a \cos \theta}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \quad (26)$$

問8

$$\langle H_\theta(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_\theta d\theta = \frac{I}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - a \cos \theta}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} d\theta \quad (27)$$

R2

解答例

ここで $t = \tan \frac{\theta}{2}$ を使って置換積分する。

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (28)$$

$$dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad (29)$$

$$d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (30)$$

$$\langle H_\theta(r) \rangle = \frac{I}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(1+t^2) - a(1-t^2)}{(1+t^2)[(r^2+a^2)(1+t^2) - 2ar(1-t^2)]} dt \quad (31)$$

$$= \frac{I}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(r+a)t^2 + (r-a)}{(1+t^2)[(r^2+a^2)(1+t^2) - 2ar(1-t^2)]} dt \quad (32)$$

$$= \frac{I}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1+t^2)} + \frac{r^2 - a^2}{[(r+a)^2 t^2 + (r-a)^2]} \right\} dt \quad (33)$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r+a)^2 t^2 + (r-a)^2} dt = \frac{1}{(r+a)|r-a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2 + 1} ds \quad (34)$$

$$= \frac{\pi}{(r+a)|r-a|} \quad (35)$$

を利用すると

$$\langle H_\theta(r) \rangle = \frac{I}{4\pi r} \left[1 + \frac{r-a}{|r-a|} \right] = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases} \quad (36)$$

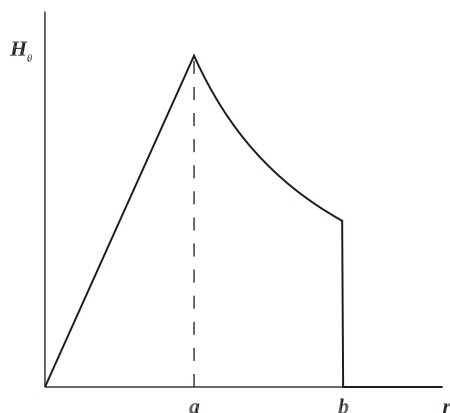
問 9 設問によれば、 z 軸から半径 r の円の内側を流れる電流の総量 I_r は

$$I_r = \begin{cases} \frac{I r^2}{a^2} & (r \leq a) \\ I & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases} \quad (37)$$

となる。また磁場の強さは z 軸からの距離だけの関数で θ 方向を向いているので、

$$H_\theta = \begin{cases} \frac{I r}{2\pi a^2} & (r \leq a) \\ \frac{I}{2\pi r} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases} \quad (38)$$

である。



問 10

$$H_x = -\frac{Iy}{2\pi(x^2 + y^2)} \quad (39)$$

$$H_y = \frac{Ix}{2\pi(x^2 + y^2)} \quad (40)$$

を積分して証明する。 $x = a$ で $-a \leq y \leq a$ の区間では

$$\int_{-a}^a H_y dy = \frac{Ia}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{a^2 + y^2} dy \quad (41)$$

$$= \frac{I}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{I}{4} \quad (42)$$

となる(途中で $y = a \tan \theta$ による置換積分を行なった)。辺の長さは $2a$ なので、平均の磁場強度は $\frac{I}{8a}$ である。他の区間でも正方形の各辺に沿った方向の磁場の積分は $I/4$ となるので、合わせると I となる。

R2

解答例

問 11 コイルはその中心の軸を中心とする回転に対して対称なので、磁場の強さや向きは軸からの距離 r だけの関数である。またコイルが無限に長いので、磁場はコイルの外にはなく、コイルの中では軸の方向に沿っている。これらのことを考え、図4に示すように、コイルの軸を含む断面に軸方向の長さ ℓ の長方形を考え、アンペールの法則を適用する。この長方形を貫く電流は $n\ell I$ である。またこの長方形で、辺に沿った磁場があるのはコイルの中で軸方向の辺だけである。この磁場を H とすると、 $n\ell I = \ell H$ という等式が得られる。磁場の値は辺のある場所には依らないので、コイルの中のどの場所でも $H = nI$ の磁場となることが分かる。

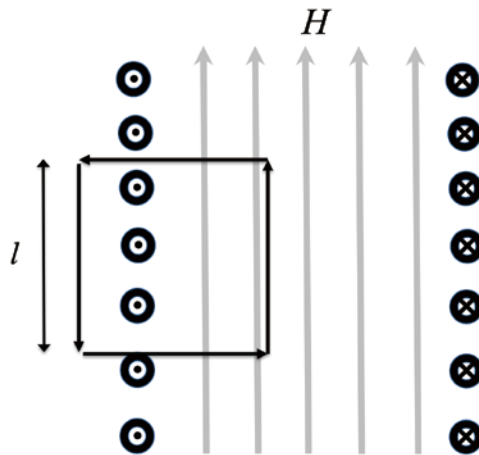


図4 コイルの断面

問12 次のような事柄を指摘することを期待している。

- 導線の周囲にある電子機器に影響を与える。
- 磁場を作ることによりエネルギーが損失する。
- 磁場は周囲の電気回路に影響を与えるが，導線や同軸ケーブルにはその反作用が働かずである。周囲の影響を受けることは雑音が入りやすいことと同義である。

R2

解答例

飛び入学の物理Ⅳ

2025年3月1日 初版 第1刷発行

編集・発行

千葉大学 先進科学センター
〒260-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33
TEL 043-290-3521
<https://www.cfs.chiba-u.ac.jp/>

印刷・製本

株式会社 正文社
〒260-0001 千葉市中央区都町1-10-6
TEL 043-233-2235 FAX 043-231-5562

装丁デザイン

田中重昌（千葉大学広報学生ボランティアグループ「クリエイティブ」）

監修

宮崎紀郎（千葉大学名誉教授・グランドフェロー）

